

Quelques contributions à la sélection de variables et aux tests non-paramétriques

Laëtitia Comminges

▶ **To cite this version:**

Laëtitia Comminges. Quelques contributions à la sélection de variables et aux tests non-paramétriques. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paris-Est, 2012. Français. NNT : 2012PEST1068 . pastel-00804979

HAL Id: pastel-00804979
https://pastel.hal.science/pastel-00804979

Submitted on 26 Mar 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Paris-Est

École Doctorale MSTIC

Thèse de doctorat

Discipline : Mathématiques appliquées

présentée par

Laëtitia Comminges

Quelques contributions à la sélection de variables et aux tests non-paramétriques

---

dirigée par Arnak S. Dalalyan

Soutenue le 13 décembre 2012 devant le jury composé de :

M. Christophe Pouet	Ecole centrale de Marseille	rapporteur
M^{me} Béatrice Laurent	I.M.T/INSA Toulouse	rapporteur
M^{me} Cristina Butucea	Université Paris-Est Marne-la-Vallée	examinateur
M. Arnak Dalalyan	ENSAE-CREST	directeur
M. Alexandre Tsybakov	Université Paris VI/ENSAE-CREST	président

LIGM/IMAGINE
École des Ponts ParisTech
6, Av Blaise Pascal - Cité Descartes
Champs-sur-Marne
77455 Marne-la-Vallée cedex 2

Remerciements

Je remercie mon directeur de thèse, ainsi que Daniel et Simon.

Résumé

Résumé

Les données du monde réel sont souvent de très grande dimension, faisant intervenir un grand nombre de variables non pertinentes ou redondantes. La sélection de variables est donc utile dans ce cadre. D'abord, on considère la sélection de variables dans le modèle de régression quand le nombre de variables est très grand. En particulier on traite le cas où le nombre de variables pertinentes est bien plus petit que la dimension ambiante. Sans supposer aucune forme paramétrique pour la fonction de régression, on obtient des conditions minimales permettant de retrouver l'ensemble des variables pertinentes. Ces conditions relient la dimension intrinsèque à la dimension ambiante et la taille de l'échantillon. Ensuite, on considère le problème du test d'une hypothèse nulle composite sous un modèle de régression nonparamétrique multivarié. Pour une fonctionnelle quadratique donnée Q, l'hypothèse nulle correspond au fait que la fonction f satisfait la contrainte $Q[f] = 0$, tandis que l'alternative correspond aux fonctions pour lesquelles $|Q[f]|$ est minorée par une constante strictement positive. On fournit des taux minimax de test et les constantes de séparation exactes ainsi qu'une procédure optimale exacte, pour des fonctionnelles quadratiques diagonales et positives. On peut utiliser ces résultats pour tester la pertinence d'une ou plusieurs variables explicatives. L'étude des taux minimax pour les fonctionnelles quadratiques diagonales qui ne sont ni positives ni négatives, fait apparaître deux régimes différents : un régime «régulier» et un régime «irrégulier». On applique ceci au test de l'égalité des normes de deux fonctions observées dans des environnements bruités.

Sélection de variables, régression nonparamétrique, tests d'hypothèses non paramétriques, asymptotiques exactes, taux de séparation, approche minimax, dispositif expérimental aléatoire, régression en grande dimension.

A few contributions to nonparametric variable selection and hypotheses testing

Abstract

Real-world data are often extremely high-dimensional, severely underconstrained and interspersed with a large number of irrelevant or redundant features. Relevant variable selection is a compelling approach for addressing statistical issues in the scenario of high-dimensional and noisy data with small sample size. First, we address the issue of variable selection in the regression model when the number of variables is very large. The main focus is on the situation where the number of relevant variables is much smaller than the ambient dimension. Without assuming any parametric form of the underlying regression function, we get tight conditions making it possible to consistently estimate the set of relevant variables. Secondly, we consider the problem of testing a particular type of composite null hypothesis under a nonparametric multivariate regression model. For a given quadratic functional Q, the null hypothesis states that the regression function f satisfies the constraint $Q[f] = 0$, while the alternative corresponds to the functions for which $Q[f]$ is bounded away from zero. We provide minimax rates of testing and the exact separation constants, along with a sharp-optimal testing procedure, for diagonal and nonnegative quadratic functionals. We can apply this to testing the relevance of a variable. Studying minimax rates for quadratic functionals which are neither positive nor negative, makes appear two different regimes: "regular" and "irregular". We apply this to the issue of testing the equality of norms of two functions observed in noisy environments.

Keywords

Variable selection, nonparametric regression, set estimation, sparsity pattern, nonparametric hypotheses testing, sharp asymptotics, separation rates, minimax approach, random design, high-dimensional regression.

Table des matières

Introduction et présentation des résultats principaux **9**

1 Introduction à la sélection de variables **13**

1.1 Sélection de modèle classique 13

1.2 Vraisemblance pénalisée 16

1.3 Résultats pour certaines méthodes 18

1.4 Conditions minimales 21

1.5 Examen rapide et sélectif de quelques autres méthodes 23

1.6 Sélection de variables dans le contexte de variables groupées 28

1.7 Cas non paramétrique 29

2 Sélection de variables pour la régression nonparamétrique **33**

2.1 Formulation du problème et hypothèses 33

2.2 Cadre idéalisé : modèle de bruit blanc gaussien 35

2.3 Nombre de points à coordonnées entières dans une boule 41

2.4 Optimalité des hypothèses 44

2.5 Adaptativité et taux minimax de séparation 45

2.6 Régression nonparamétrique avec un design aléatoire 48

2.7 Remarques de conclusion 50

2.8 Quelques extensions 53

2.9 Preuves 57

3 Tests d'hypothèses basées sur les fonctionnelles quadratiques **71**

3.1 Introduction 72

3.2 Tests minimax pour les fonctionnelles quadratiques diagonales 76

3.3 Exemples 83

3.4 Fonctionnelles quadratiques diagonales non positives et non négatives . . . 87
3.5 Preuves des résultats énoncés en Section 3.2 92
3.6 Preuves des lemmes et des propositions de la Section 3.3 104
3.7 Preuve de la Proposition 3.13 105
3.8 Preuve de la Proposition 3.17 108
3.9 Preuves des résultats énoncés dans la Section 3.4 109

Bibliographie **113**

Introduction et présentation des résultats principaux

L'analyse de données en grande dimension est devenue extrêmement fréquente et importante dans divers domaines des sciences, allant de la génomique et de la biologie à l'économie, la finance et l'intelligence artificielle. Par exemple, pour la classification de maladies utilisant des puces à ADN ou des données protéomiques, des dizaines de milliers d'expressions de molécules ou d'ions sont des prédicteurs potentiels. Dans les études sur l'association entre génotypes et phénotypes il y a des centaines de milliers de variables potentielles pour les phénotypes. Quand des interactions sont considérées, la dimension augmente rapidement. Par exemple, pour la gestion de portefeuilles avec deux mille titres, cela donne déjà plus de deux millions de paramètres dans la matrice de covariance. Les données sont contaminées par du bruit, rendant encore plus difficile la récupération de l'information utile à partir des données. De plus, souvent le nombre de données n est nettement inférieur au nombre de variables.

L'accumulation de bruit dans les problèmes de grande dimension est bien connue. Par exemple pour la classification, on sait que le discriminant de Fisher ne fonctionne pas bien en grande dimension (cf. [10]), et même en utilisant la règle d'indépendance, la classification utilisant toutes les variables peut être aussi peu performante qu'un choix au hasard à cause de l'accumulation de bruit dans l'estimation des centres (cf. [31]). Ainsi, il apparaît nécessaire de sélectionner les variables intéressantes pour traiter ces problèmes de grande dimension.

Ce qui rend possible l'inférence statistique en grande dimension est l'hypothèse de sparsité : le nombre de variables pertinentes d^* est en général nettement inférieur au nombre total de variables considérées d. Par exemple, pour la classification de maladies, on pense communément que seulement des dizaines de gènes sont responsables d'une maladie.

Il est désormais bien connu que, dans le cadre de la régression linéaire en grande dimension, l'estimation consistante de l'ensemble des variables pertinentes—appelé support de sparsité—est possible sous la condition $d^* \log(d/d^*) = O(n)$ quand $n \to \infty$. Réciproquement, il est aussi connu que si $d^* \log(d/d^*)$ est supérieur à un certain seuil alors il est impossible de retrouver le support de sparsité (cf. [86] et le Chapitre 1). Ainsi, en régression linéaire, on a une condition minimale sur le triplet (n, d, d^*) garantissant l'existence d'estimateurs consistants. La situation est différente pour la régression non linéaire puisque, à

notre connaissance, il n'y a pas de résultats fournissant des conditions minimales pour l'estimation consistante du support de sparsité. Les articles [59, 8] considèrent le problème de la sélection de variables dans le modèle de la régression gaussienne non paramétrique. Ils prouvent la consistance des procédures proposées sous certaines hypothèses qui—au vu de notre travail—s'avèrent sous-optimales (cf. Chapitre 1, Section 1.7). En particulier, dans [59], la dimension ambiante maximale d est supposée être de l'ordre de $O(\log n/\log\log n)$ et d^* constant. Dans [8], d peut être aussi grand que $O(\log n)$ et d^* est supposé constant. Il y a un écart important dans les conditions de consistance entre la régression linéaire et la régression non linéaire. Par exemple, si la dimension intrinsèque d^* est fixe, alors la condition garantissant l'estimation consistante du support de sparsité est $(\log d)/n \leq C$, pour un certain C en régression linéaire tandis que c'est $d = O(\log n)$ dans le cas non paramétrique. Bien qu'il soit indéniable que la régression non paramétrique est bien plus complexe que la régression linéaire, il n'est pas aisé de trouver une justification pour un tel écart entre les deux conditions. La situation est même pire dans le cas où $d^* \to \infty$. En fait, pour le modèle linéaire avec une dimension ambiante croissant au plus polynomialement $d = O(n^k)$, il est possible d'estimer le support de sparsité pour une dimension intrinsèque d^* aussi grande que $n^{1-\epsilon}$, pour un certain $\epsilon > 0$. Autrement dit, l'indice de sparsité peut être presque du même ordre que la taille de l'échantillon. En comparaison, pour la régression non paramétrique, il n'y a pas de procédure convergeant vers le support de sparsité quand à la fois n et d^* tendent vers l'infini, même si d^* augmente extrêmement lentement.

Dans ce travail, on comble cet écart en introduisant une procédure de sélection de variable simple qui sélectionne les variables pertinentes en comparant certaines fonctionnelles quadratiques des coefficients de Fourier empiriques à un certain seuil. La consistance de cette procédure est établie sous certaines conditions sur le triplet (d^*, d, n) et la minimalité de ces conditions est prouvée. Les principaux résultats sont les suivants :

- Quand le nombre de variables pertinentes d^* est fixé et quand la taille de l'échantillon n tend vers l'infini, il existe des nombres réels positifs c_* et c^* tels que (a) si $(\log d)/n \leq c_*$ l'estimateur proposé dans la Section 2.2 est consistant et (b) aucun estimateur du support de sparsité ne peut être consistant si $(\log d)/n \geq c^*$.
- Quand le nombre de variables pertinentes d^* tend vers l'infini avec $n \to \infty$, alors il existe des nombres réels $\underline{c}_i$ et $\bar{c}_i$, $i = 1, 2$ tels que $\underline{c}_1 > 0$, $\bar{c}_1 > 0$ et (a) si $\underline{c}_1 d^* + \log\log d - \log n < \underline{c}_2$ l'estimateur proposé dans la Section 2.2 est consistant et (b) aucun estimateur du support de sparsité ne peut être consistant si $\bar{c}_1 d^* + \log\log d - \log n > \bar{c}_2$.
- En particulier, si d ne croît pas plus vite qu'un polynôme en n, alors il existe des nombres réels positifs c_0 et c^0 tels que (a) si $d^* \leq c_0 \log n$ l'estimateur proposé dans la Section 2.2 est consistant et (b) aucun estimateur du support de sparsité ne peut être consistant si $d^* \geq c^0 \log n$.

Dans le régime de dimension intrinsèque croissante $d^* \to \infty$ et d'une dimension ambiante modérément large $d = O(n^C)$, pour un certain $C > 0$, on essaie de rendre la constante c_0 aussi proche que possible de la constante c^0. Ce but est atteint pour le modèle de

bruit blanc gaussien et, de façon très surprenante, requiert l'utilisation de certains outils d'analyse complexe, tels que la fonction θ de Jacobi et la méthode du point-selle, de façon à évaluer le nombre de points à coordonnées entières se trouvant dans une boule d'un espace euclidien de dimension croissante.

Pour savoir si une variable est pertinente, on peut effectuer un test d'hypothèses : la fonction de régression f ne dépend pas de la variable j si et seulement si l'intégrale du carré de la fonction $f(\boldsymbol{x}) - \int_0^1 f(\boldsymbol{x})\, dx_j$ est nulle. Cela revient à tester une hypothèse nulle composite définie par une fonctionnelle quadratique. C'est ce qu'on étudie plus généralement dans un deuxième temps. Pour une fonctionnelle quadratique Q, l'hypothèse nulle signifie que la fonction de régression f satisfait la contrainte $Q[f] = 0$, tandis que l'hypothèse alternative correspond aux fonctions pour lesquelles $|Q[f]|$ est minoré par une constante strictement positive.

Dans un premier temps, on fournit les taux minimax de test et les constantes de séparation exactes, ainsi que la procédure de test optimale exacte, pour des fonctionnelles quadratiques diagonales et positives. On considère des classes de régularité de forme ellipsoïdale et on vérifie que nos conditions sont remplies dans le cas particulier des ellipsoïdes correspondant à des classes de Sobolev anisotropes. Dans ce cas, on présente une forme explicite du taux minimax et de la constante de séparation exacte. Ce résultat est appliqué à certaines fonctionnelles. Un exemple, qui peut être appliqué au problème de sélection de variables, consiste à tester le fait qu'une dérivée partielle d'ordre $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$, notée $\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_d} f / \partial t_1^{\alpha_1} \ldots \partial t_d^{\alpha_d}$, est identiquement nulle contre l'hypothèse que cette dérivée est significativement différente de 0. Comme conséquence de notre résultat principal, on montre que si f se trouve dans la boule de Sobolev anisotrope de régularité $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_d)$, et si on pose $\delta = \sum_{i=1}^d \alpha_i/\sigma_i$, $\bar{\sigma} = \left(\frac{1}{d}\sum_{i=1}^d \sigma_i^{-1}\right)^{-1}$, alors le taux minimax est $r_n^* = n^{-2\bar{\sigma}(1-\delta)/(4\bar{\sigma}+d)}$ pourvu que $\delta < 1$ et $\bar{\sigma} > d/4$.

Dans un deuxième temps, on étudie les taux minimax pour les fonctionnelles quadratiques qui ne sont ni positives ni négatives. Ceux-ci font apparaître deux régimes différents : un régime «régulier» et un régime «irrégulier». Dans le cas régulier, le taux minimax est égal à $n^{-1/4}$ tandis que dans le cas irrégulier, le taux dépend de l'indice de régularité et est plus lent que dans le cas régulier. On applique nos résultats au problème de test de l'égalité des normes de deux fonctions observées dans des environnements bruités.

Chapitre 1

Introduction à la sélection de variables

On rassemble ici les notations qui vont être utilisées tout le long de ce travail. Pour un ensemble A, $\mathbf{1}_{\mathrm{A}}$ représente la fonction indicatrice de A, $|A|$ son cardinal, A^c son complémentaire. Pour une matrice $\mathtt{M}$, $\mathtt{M}^T$ est sa transposée et pour un vecteur $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_d)$, $\|\mathbf{v}\|$ désigne sa norme euclidienne et $\|\mathbf{v}\|_1 = \sum_{i=1}^{d} |v_i|$. Pour deux suites de réels (a_n) et (b_n), la notation $a_n \ll b_n$ signifie que a_n est nettement plus petit que b_n.

1.1 Sélection de modèle classique

On s'intéresse d'abord au cas paramétrique. Supposons que les données disponibles sont $(\boldsymbol{x}_i, y_i)_{i=1}^n$, où y_i est la $i$ème observation de la variable réponse et $\boldsymbol{x}_i$ le vecteur d-dimensionnel de variables explicatives. On suppose habituellement qu'il s'agit d'un échantillon aléatoire de la population $(\boldsymbol{x}, y)$ où la moyenne conditionnelle de y étant donné $\boldsymbol{x}$ est une fonction linéaire de $\boldsymbol{x}$ cest-à-dire $E(y|\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{x}$ avec $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_d)^T$. On note $\mathtt{X}$ la matrice du design, c'est-à-dire la matrice dont les lignes sont les vecteurs $\boldsymbol{x}_i$, pour $i = 1, \ldots, n$. On note $(\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_d)$ les colonnes de $\mathtt{X}$. On note $\boldsymbol{Y}$ le vecteur de composantes $(y_i)_{i=1}^n$. Plus généralement, on suppose qu' il y a un modèle paramétrique $f_{\boldsymbol{\theta}}$ dont le paramètre $\boldsymbol{\theta}$ appartient à un sous-ensemble Θ de $\mathbb{R}^d$. Etant donné des sous-ensembles $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_M$ de Θ, le but de la sélection de modèle (cf. par exemple [**?**]) est de choisir celui qui contient la vraie valeur de $\boldsymbol{\theta}$. En régression linéaire, la sélection de variable peut être vue comme un cas particulier de sélection de modèle correspondant à la situation où $M = 2^d$ et les éléments de chaque Θ_m partagent le même support.

1.1.1 Critères de choix

***AIC* (Akaike's information criterion) et AIC_c.** Akaike [2] propose de choisir un modèle qui minimise la divergence de Kullback Leibler du modèle ajusté par rapport

au vrai modèle. Akaike considère l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\boldsymbol{\theta}}(m) = (\hat{\theta}_1(m), \ldots, \hat{\theta}_d(m))^T$ du vecteur $\boldsymbol{\theta}$ et montre que, à une constante additive près, la divergence KL estimée peut être asymtotiquement développée en

$$-l_n(\hat{\boldsymbol{\theta}}(m)) + \lambda \|(\hat{\boldsymbol{\theta}}(m)\|_0 = -l_n(\hat{\boldsymbol{\theta}}(m)) + \lambda \sum_{j=1}^{d} I(\hat{\theta}_j(m) \neq 0), \tag{1.1}$$

où l_n est la fonction de log-vraisemblance. Avec $\lambda = 1$, l'expression (1.1) correspond à $AIC(m)$.

Quand n est petit ou $k(m) \equiv \|\hat{\boldsymbol{\theta}}(m)\|_0$, le nombre de paramètres, est grand, on utilise plutôt le critère AIC corrigé, défini par

$$AIC_c(m) = AIC(m) + \frac{k(m)(k(m)+1)}{n - k(m) - 1}.$$

BIC (bayesian information criterion). Schwarz [78] considère une approche bayésienne et propose le critère BIC avec $\lambda = (\log n)/2$ dans (1.1). Le BIC essaie de maximiser la probabilité a posteriori du modèle.

AIC et BIC ont en commun de minimiser la vraisemblance pénalisée (1.1). Quand $\|\hat{\boldsymbol{\theta}}\|_0 = m$, la solution de (1.1) est le sous-ensemble avec la plus grande vraisemblance maximum parmi tous les sous-ensembles de taille m. Clairement, le calcul du problème L_0 pénalisé est un problème combinatoire avec une complexité NP.

La méthode qui suit concerne le modèle linéaire

$$y = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{\beta} + w, \tag{1.2}$$

où l'erreur w est supposée de variance σ^2 .

C_p de Mallows Quand la vraisemblance normale est utilisée, (1.1) devient les moindres carrés pénalisés. Soit RSS_m la somme résiduelle des carrés du meilleur sous-ensemble avec m variables. Alors le C_p de Mallows [67], où $C_p(m) = \mathrm{RSS}_m/\hat{\sigma}^2 + 2m - n$, où $\hat{\sigma}^2$ est la variance résiduelle du modèle complet, correspond à $\lambda = 1$.

Les propriétés les plus connues du BIC et du AIC sont l'optimalité asymptotique (en perte) et la consistance (en sélection). Quand f appartient aux familles candidates de fonctions de régression, la probabilité de sélectionner le vrai modèle par le BIC tend vers 1 quand n tend vers l'infini. D'autre part, si la vraie fonction de régression f n'est dans aucune des familles candidates et si le nombre de modèles de même dimension n'augmente pas trop vite en dimension, l'erreur moyenne au carré du modèle sélectionné par AIC est asymptotiquement équivalente à la plus petite erreur possible offerte par les modèles candidats (cf. par ex. [80, 91]). En général, AIC n'est pas consistent et BIC n'est pas asymptotiquement optimal dans le cas nonparamétrique.

1.1.2 Procédures de sélection de variables

On choisit un modèle à l'aide de l'un des critères ci-dessus ou bien à l'aide de t-tests (tests de Student), F-tests, le R^2_{aj} etc. On peut utiliser les algorithmes de recherche suivants :

Sélection exhaustive On effectue une recherche parmi tous les modèles possibles. Cela donne 2^d modèles à considérer et n'est donc possible que pour d petit.

Méthode descendante L'algorithme est le suivant :

- Calculer l'estimateur des moindres carrés pour le modèle incluant toutes les variables explicatives.
- Effectuer un test de Student (ou un autre critère) pour chacune des variables explicatives.
  Deux cas se présentent :
  • Les variables sont toutes significatives. Ce modèle est alors choisi. Nous arrêtons là notre analyse.
  • Eliminer la variable la moins significative du modèle.
- Recommencer le processus avec une variable en moins.

Cette méthode est plus économique que la précédente mais présente l'inconvénient de ne pas pouvoir réintroduire une variable une fois qu'elle a été supprimée.

Ces deux premières méthodes ne sont applicables que pour $n \geq d$. Ce n'est pas le cas de la méthode suivante.

Méthode ascendante On procède dans le sens inverse de la méthode précédente. On effectue les d régressions possibles avec une seule variable explicative. Pour chacune d'elles, on effectue le test de Student. On retient le modèle pour lequel la variable est la plus significative. On effectue ensuite les $d-1$ régressions possibles avec deux variables (dont celle choisie à la première étape). Pour chacune d'elle, on effectue le test de Student pour la nouvelle variable et on retient la plus significative. On continue ainsi jusqu'à ce qu'aucune variable restante ne soit significative. Ici l'inconvénient est qu'une variable introduite ne peut plus être éliminée. Le modèle final peut alors contenir des variables non significatives. Ce problème est résolu par la procédure stepwise.

Procédure stepwise A chaque étape, nous réexaminons toutes les variables introduites précédemment dans le modèle. En effet, une variable considérée comme la plus significative à une étape de l'algorithme peut à une étape ultérieure devenir non significative.

Sélection stagewise (OMP ou greedy least squares regression) On introduit les variables une à une en prenant à chaque étape la variable la plus corrélée avec le résidu

courant. On s'arrête quand la corrélation maximum des variables restantes avec le résidu est inférieure à une seuil fixé.

On passe maintenant à des méthodes plus récentes, en examinant d'abord le cas paramétrique. Comme indiqué précédemment, la régularisation L_0 intervient naturellement dans beaucoup de méthodes de sélections de modèle classiques. Cependant le calcul est impraticable en grande dimension. On a aussi remarqué que certaines méthodes ne fonctionnent que pour $d \leq n$. Pour traiter le cas de la grande dimension $d \gg n$ avec d dépendant de n, on suppose que le vecteur $\boldsymbol{\beta}$ est sparse. On note, pour tout vecteur $\boldsymbol{\beta}$, $S(\boldsymbol{\beta})$ le support de $\boldsymbol{\beta}$, c'est-à-dire $S(\boldsymbol{\beta}) = \{i \in [1, d] : \beta_i \neq 0\}$. Si $\boldsymbol{\beta}$ est le vrai vecteur, on note plus simplement S son support et s le cardinal de S.

1.2 Vraisemblance pénalisée

Pour pallier l'intractabilité du critère basé sur la pénalisation par la norme L_0, on s'intéresse à des penalisations plus générales. Ceci résulte en la forme généralisée

$$n^{-1} l_n(\boldsymbol{\beta}) - \sum_{j=1}^{d} p_\lambda(|\beta_j|), \tag{1.3}$$

où $l_n(\boldsymbol{\beta})$ est la log-vraisemblance et p_λ est une fonction de pénalité indexée par le paramètre de régularisation $\lambda \geq 0$.

Une généralisation naturelle de la régression pénalisée par la norme L_0 est la régression pénalisée par la norme L_q, appelée régression bridge dans [63], avec $0 < q \leq 2$. Un cas particulier important est la régression L_1, aussi appelée LASSO par Tibshirani [82] dans le cadre de la régression ordinaire. Le garotte non négatif est introduit dans [11].

Fan et Li recommandent d'utiliser des fonctions de pénalité décroissantes et donnant des estimateurs ayant les propriétés suivantes :

1 Sparsité : l'estimateur résultant réduit les petits coefficients estimés à zéro.

2 Absence de biais : l'estimateur résultant est presque sans biais.

3 Continuité : l'estimateur résultant est continu en les données.

Antoniadis et Fan [4] donnent des conditions sous lesquelles la fonction de pénalité vérifie ces trois propriétés.

Aucune des pénalités L_q ne vérifie les trois propriétés énoncées précédemment. Pour cette raison, Fan [30] et Fan et Li [35] introduisent la pénalité SCAD (smoothly clipped absolute deviation) dont la dérivée est donnée par

$$p'_\lambda(t) = \lambda\{\mathbf{1}_{\{t \leq \lambda\}} + \frac{(a\lambda - t)_+}{(a-1)\lambda}\mathbf{1}_{t>\lambda}\} \quad \text{pour un certain } a > 2, \tag{1.4}$$

où $p_\lambda(0) = 0$ et, souvent, $a = 3.7$ est utilisé (suggéré par un argument bayésien).

1.2.1 Calcul et implémentation

Quand on utilise la pénalité L_1, la fonction objectif (1.3) est concave, donc on peut utiliser les algorithmes d'optimization convexe. Il y a divers algorithmes pour résoudre le problème avec la pénalisation L_1. Le plus connu est sûrement l'algorithme LARS (least angle regression). Efron, Hastie, Johnstone et Tibshirani [27] proposent cet algorithme rapide et efficace pour la sélection de variable, dont une simple modification donne le chemin de solution entier du LASSO $\{\boldsymbol{\beta}(\lambda); \lambda > 0\}$. Le calcul est basé sur le fait que le chemin solution LASSO est linéaire par morceau en λ.

Quand p_λ est non convexe, Zou et Li [98] utilisent l'approximation linéaire locale (LLA). Pour une valeur initiale $\boldsymbol{\beta}^* = (\beta_1^*, \ldots, \beta_d^*)^T$, la fonction pénalité peut être approchée localement par

$$p_\lambda(|\beta_j|) \approx p_\lambda(|\beta_j^*|) + p'_\lambda(\beta_j)(|\beta_j| - |\beta_j^*|) \quad \text{pour } \beta_j \approx \beta_j^*.$$

Avec le LLA, la vraisemblance pénalisée (1.3) devient

$$n^{-1} l_n(\boldsymbol{\beta}) - \sum_{j=1}^{d} w_j |\beta_j|,$$

où les poids sont $w_j = p'_\lambda(|\beta_j^*|)$. Ceci est un problème d'optimisation concave si la log-vraisemblance est concave. Différentes fonctions de pénalité donnent différents schémas de poids, et le LASSO donne des poids constants. Dans ce sens, on obtient une régression pénalisée par L_1 avec des poids qui changent itérativement. Le LASSO adaptatif de Zou [97] revient à utiliser les poids $w_j = |\beta_j^*|^{-\gamma}$ pour un certain γ. Il existe bien d'autres algorithmes (cf. par exemple [90]).

1.2.2 Choix du paramètre de pénalité

Une grande valeur du paramètre λ tend à choisir un modèle simple et l'estimation correspondante a une variance faible , tandis qu'une faible valeur choisit un modèle complexe et donne un faible biais. Le choix optimal de λ correspond à un équilibre biais/variance, ce qui se fait fréquemment par validation croisée (CV). Wang et al. [88] montrent que le modèle sélectionné par la validation croisée généralisée en utilisant la pénalité SCAD contient toutes les variables importantes mais avec une probabilté non nulle contient des variables non importantes, et que le modèle sélectionné en utilisant BIC est consistant en terme de sélection de modèle.

Zou et al. [99] montrent que le nombre de composantes non nulles de la solution du LASSO $\hat{\boldsymbol{\beta}}(\lambda)$ pour un λ donné est un estimateur sans biais de son degré de liberté $\hat{df}(\lambda)$. On peut ensuite utiliser le critère AIC ou BIC pour trouver le paramètre λ optimal : $\lambda(optimal) = \arg\min_\lambda \frac{\|\boldsymbol{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}(\lambda)\|^2}{n\sigma^2} + \frac{w_n}{n} df\hat{(}\lambda)$, avec $w_n = 2$ pour AIC et $w_n = \log n$ pour BIC.

1.3 Résultats pour certaines méthodes

On s'intéresse uniquement au problème d'estimation du support S. Pour tout sous-ensemble A, on note $\mathtt{X}_A$ (respectivement $\boldsymbol{\beta}_A$) la matrice $n \times |A|$ (respectivement le vecteur de $\mathbb{R}^{|A|}$) formée en concaténant les colonnes $\{\boldsymbol{X}_i, i \in A\}$ indexées par A (respectivement en gardant les lignes $\beta_i, i \in A$).

1.3.1 Lasso

Meinhausen et Buhlmann [69] et Zhao et Yu [95] étudient le LASSO avec respectivement des designs aléatoires et des designs déterministes. On suit ici l'article plus général de Wainwright [87]. On commence par le cas d'un design déterministe. Pour tout vecteur $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p$, on définit le vecteur signe $\mathbb{S}_\pm(\boldsymbol{\beta})$ de composantes

$$\mathbb{S}_\pm(\beta_i) \equiv \begin{cases} +1 & \text{si } \beta_i > 0 \\ -1 & \text{si } \beta_i < 0 \\ 0 & \text{si } \beta_i = 0. \end{cases} \tag{1.5}$$

On étudie ici la consistance en signe, qui implique la consistance de l'estimation du support. On considère le modèle linéaire (1.2). On suppose que les $\boldsymbol{X}_i$ sont normalisés : $\|\boldsymbol{X}_i\| = \sqrt{n}$ pour tout i et que les erreurs sont des variables sous-gaussiennes : il existe une constante $\sigma > 0$ telle que $E[\exp(tw_i)] \leq \exp(\sigma^2 t^2/2)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout i.

Les conditions suivantes sont imposées :

1 . Il existe un paramètre d'incohérence $\gamma \in (0, 1]$ tel que

$$\|\mathtt{X}_{S^c} \mathtt{X}_S (\mathtt{X}_S^T \mathtt{X}_S)^{-1} \operatorname{sign}(\beta_S^*)\|_\infty \leq (1 - \gamma), \tag{1.6}$$

où $\|\|_\infty$ désigne la norme d'opérateur ℓ_∞/ℓ_∞ ($\|\mathtt{M}\|_\infty = \max_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1}^n |\mathtt{M}_{ij}|$ pour toute matrice $\mathtt{M}$ de taille $m \times n$).

2. Il existe $C_{min} > 0$ tel que

$$\lambda_{min}(\frac{1}{n} \mathtt{X}_S^T \mathtt{X}_S) \geq C_{min}, \tag{1.7}$$

où on note $\lambda_{min}(\mathtt{M})$ la valeur propre minimale d'une matrice $\mathtt{M}$.

La première condition est appelée la condition irreprésentable forte dans [95] et est liée à la régression des variables $\mathtt{X}_{S^c}$ sur les variables $\mathtt{X}_S$. Ces deux conditions sont vérifiées pour des designs orthogonaux, et de manière générale pour des designs proches de l'orthogonalité. On trouve dans [95] des exemples de conditions sur le design impliquant les deux conditions précédentes.

On trouve alors le résultat suivant dans [87].

Théorème 1.1. *Supposons que la matrice du design vérifie les conditions (1.6) et (1.7). Supposons que la suite de paramètres de régularisation $\{\lambda_n\}$ satisfait*

$$\lambda_n > \frac{2}{\gamma} \sqrt{\frac{\sigma^2 \log d}{n}}.$$

Alors pour une certaine constante $c_1 > 0$, les propriétés suivantes sont vérifiées avec une probabilité supérieure à $1 - 4\exp(-c_1 n\lambda_n^2)$:

a. Le Lasso a une solution $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ dont le support est contenu dans le vrai support : $S(\hat{\boldsymbol{\beta}}) \subset S$.

b. Si en plus la valeur minimale du vecteur de régression sur son support est minorée par β_{min} telle que

$$\beta_{min} > \lambda_n \Big[\|(\boldsymbol{X}_S^T \boldsymbol{X}_S/n)^{-1}\|_\infty + \frac{4\sigma}{\sqrt{C_{min}}} \Big],$$

alors $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ a le bon support signé : $\mathbb{S}_\pm(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbb{S}_\pm(\boldsymbol{\beta})$.

Ce théorème suggère qu'une taille d'échantillon n de l'ordre de $s \log d$ devrait convenir pour retrouver le support, puisque cette taille d'échantillon autorise une valeur minimale β_{min} de l'ordre de $1/\sqrt{s}$, ce que l'on obtient si $\|\beta\| = O(1)$.

On donne ensuite un corollaire (toujours dans [87]) qui donne aussi une idée des valeurs autorisées pour le triplet (n, s, d) en lien avec la valeur minimale β_{min}.

Corollaire 1.2. *Supposons que la matrice $\boldsymbol{X}$ satisfait les conditions du théorème précédent et que $d = O(\exp(n^{\delta_3}))$, $s = O(n^{\delta_1})$ et que $\beta_{min}^2 > 1/n^{(1-\delta_2)}$ avec $0 < \delta_1 + \delta_3 < \delta_2 < 1$.*

Si on pose $\lambda_n^2 = 1/n^{(1-\delta_4)}$ pour un certain $\delta_4 \in (\delta_3, \delta_2 - \delta_1)$ alors la solution Lasso retrouve le vrai support avec une probabilité supérieure à $1 - \exp(-c_1 n^{\delta_4})$.

Le théorème suivant (Théorème 2 dans [87]) fournit une condition nécessaire pour que la solution Lasso retrouve le vrai support. La condition (1.6) avec 1 au lieu de $1 - \gamma$ est appelée condition irreprésentable faible dans [95].

Théorème 1.3. *Supposons que la condition (1.7) est vérifiée et que le vecteur de bruit a une distribution symétrique autour de 0.*

a. Si la condition irreprésentable faible est violée, disons

$$\max_{j \in S^c} |\boldsymbol{X}_j^T \boldsymbol{X}_S (\boldsymbol{X}_S^T \boldsymbol{X}_S)^{-1} \, sign(\boldsymbol{\beta}_S^*)| = 1 + \nu, \qquad avec \ \nu > 0 \tag{1.8}$$

ou

b. s'il existe $i \in S$ tel que $|\beta_i| < \lambda_n e_i^T (\boldsymbol{X}_S^T \boldsymbol{X}_S/n)^{-1} \, sign(\boldsymbol{\beta}_S^*)$,

alors pour tout λ_n et tout n, la probabilité de retrouver le support signé est telle que

$$P(\mathbb{S}_\pm(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbb{S}_\pm(\boldsymbol{\beta})) \leq 1/2.$$

La partie a de ce théorème montre la nécessité de la condition irreprésentable faible. La partie b révèle deux facteurs importants pour retrouver le support signé : le conditionnement par rapport à la matrice $(\mathbf{X}_S^T \mathbf{X}_S/n)$ et la magnitude du paramètre de régularisation λ_n par rapport à la valeur minimale β_{min}. En ce qui concerne le premier point, le cas idéal est le cas d'un design orthogonal.

Les résultats pour un design gaussien avec une matrice de covariance Σ sont similaires.

1.3.2 Pénalité non concave

Lv et Fan [65] étudient la propriété d'oracle faible dans le contexte du modèle linéaire (1.2) pour la vraisemblance pénalisée avec une fonction de pénalité non concave. On dit qu'un estimateur $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ vérifie la propriété d'oracle faible si, avec une grande probabilité, $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{S^c} = 0$ et s'il est uniformément consistant. En particulier on a alors $S(\hat{\boldsymbol{\beta}}) \subset S$. Fan et Lv [36] étendent les résultats aux modèles linéaires généralisés. Ils considèrent la classe suivante de fonctions de pénalité $\rho(t, \lambda) = \lambda^{-1} p_\lambda(t)$:

$\rho(t, \lambda)$ est croissante et concave en t et a une dérivée continue $\rho'(t, \lambda)$ avec $\rho'(0+, \lambda) > 0$. De plus $\rho'(t, \lambda)$ est croissant en λ et $\rho'(0+, \lambda)$ est indépendant de λ.

Cette classe de fonctions inclut la pénalité SCAD et le Lasso. Le modèle considéré est le modèle linéaire généralisé avec un lien canonique, c'est-à-dire qu'il existe une fonction b telle que la distribution conditionnelle de Y étant donné X appartient à la famille exponentielle canonique et la fonction de log-vraisemblance de l'échantillon est donnée, à une transformation affine près, par

$$l_n(\boldsymbol{\beta}) = n^{-1}[\boldsymbol{Y}^T \mathtt{X}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{1}^T \boldsymbol{b}(\mathtt{X}\boldsymbol{\beta})]. \tag{1.9}$$

On note $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n$ le vecteur $\mathtt{X}\boldsymbol{\beta}$ et $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{\theta}) = b(\theta_1, \ldots, \theta_n)$. On introduit aussi la notation suivante : $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta}) = (b'(\theta_1), \ldots, b'(\theta_n))^T$ et $\Sigma(\boldsymbol{\theta}) = \mathrm{diag}\{b''(\theta_1), \ldots, b''(\theta_n)\}$.

On considère les deux conditions suivantes

$$\|(\mathtt{X}_S^T \Sigma(\boldsymbol{\theta}) \mathtt{X}_S)^{-1}\|_\infty = O(b_s n^{-1}), \tag{1.10}$$

$$\|\mathtt{X}_{S^c}^T \Sigma(\boldsymbol{\theta}) \mathtt{X}_S (\mathtt{X}_S^T \Sigma(\boldsymbol{\theta}) \mathtt{X}_S)^{-1}\|_\infty \leq \min\{C \frac{\rho'(0+, \lambda)}{\rho'(\beta_{min}/2)}, O(n^{\alpha_1})\} \tag{1.11}$$

où b_s est une suite divergente, $C \in (0, 1)$, $\alpha_1 \in [0, 1/2]$.

Sous ces deux conditions ainsi que des conditions de régularité additionnelles, l'estimateur $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ maximisant (1.3) vérifie la propriété d'oracle faible.

Le côté gauche de (1.11) correspond aux coefficients de régression multiple de $\mathtt{X}_S$ sur $\mathtt{X}_{S^c}$ avec des poids $\{b''(\theta_i)\}$. Si chaque élément des coefficients de régression multiple est d'ordre 1, alors la norme L_1 de ces coefficients est d'ordre $O(s)$. Donc on peut avoir une sparsité de l'odre de $O(n^{\alpha_1})$, du moment que le premier terme dans (1.11) domine, ce qui se produit pour la pénalité SCAD si $\beta_{min} \gg \lambda_n$. Au contraire, avec la pénalité L_1, la borne (1.11) est plus restrictive. Quand on est dans le modèle linéaire, $\Sigma = \mathtt{I}_n$ et $\boldsymbol{\mu}$ est nul, on retrouve la condition irreprésentable forte.

Pour des résultats plus fins sur les pénalités non concaves, on renvoie le lecteur à l'article de Zhang [93].

1.3.3 Sélection stagewise

Zhang [94] considère le modèle linéaire (1.2) avec des erreurs sous-gaussiennes. Les résultats sont proches de ceux du Lasso. On impose les conditions (1.6) et (1.7) et on

normalise aussi les vecteurs de base. On obtient, avec une grande probabilité, l'inclusion $S(\hat{\boldsymbol{\beta}}) \subset S$. Et on obtient l'égalité avec une probabilité supérieure à $1-2\eta$, pour $\eta \in (0, 1/2)$, si $\beta_{min} \geq c\sigma\sqrt{\log(d/\eta)/n}$ où la constante c dépend des quantités γ et C_{min} apparaissant dans (1.6) et (1.7). En comparaison, pour le Lasso, la condition apparaissant pour β_{min} dépend non seulement de ces deux quantités mais aussi de la quantité $|||(\mathtt{X}_S^T\mathtt{X}_S/N)^{-1}|||_\infty$. Or on peut trouver des matrices pour lesquelles γ et C_{min} sont de l'ordre de la constante, mais $|||(\mathtt{X}_S^T\mathtt{X}_S/N)^{-1}|||_\infty$ est de l'odre de $\sqrt{s}$.

1.4 Conditions minimales

Dans cette partie on s'intéresse aux limites théoriques de l'estimation du support. Les articles utilisés sont [85, 86]. Dans le second article, Wainwright considère le modèle linéaire (1.2) avec des erreurs gaussiennes indépendantes de variance σ^2 et un design aléatoire gaussien : les $\boldsymbol{x}_i$ sont iid tels que $\boldsymbol{x}_i \sim N(0, \Sigma)$. L'auteur donne des conditions sur le triplet (n, s, d) et sur la valeur β_{min} assurant l'existence ou non d'un estimateur consistant du support. L'estimateur "optimal" choisi est un estimateur de recherche exhaustive utilisé seulement pour montrer la minimalité des conditions, sans considération sur la complexité de calcul.

Pour un estimateur ψ du support S, trois types d'erreurs sont considérés

a. Probabilité prise par rapport à un support fixé : $q_S(\psi) = P(\psi \neq S|S)$.

b. Probabilité moyenne : $q_{ave}(\psi) = \frac{1}{\binom{d}{s}} \sum_{S \in P_s^d} q_S(\psi)$ où P_s^d représente l'ensemble des parties à s éléments dans $\{1, \ldots, d\}$.

c. Probabilité dans le pire des cas : $q_{max}(\psi) = \max_{S \in P_s^d} q_S(\psi)$.

Pour une paire $(S, T) \in P_s^d \times P_s^d$, on définit la matrice

$$\Gamma(T, S) = \Sigma_{(S\setminus T)S\setminus T} - \Sigma_{(S\setminus T)T}(\Sigma_{TT})^{-1}\Sigma_{T(S\setminus T)}.$$

Les résultats font intervenir les quantités suivantes $\rho_S(\Sigma)$ et $\rho_{uni}(\Sigma)$ définies par

$$\rho_S(\Sigma) = \min_{T \in P_s^d \setminus S} \lambda_{min}(\Gamma(T, S)),$$

$$\rho_{uni}(\Sigma) = \min_{S \in P_s^d} \rho_S(\Sigma).$$

Wainwright définit une procédure de recherche exhaustive ψ^* :

a. Pour chaque sous-ensemble T de P_d^s, on résout le programme quadratique

$$Z(T) \equiv \min_{\boldsymbol{\beta}_T \in \mathbb{R}^s} \|\boldsymbol{Y} - \mathtt{X}_T\boldsymbol{\beta}_T\|_2^2.$$

b. L'estimateur est alors défini par : $\psi^* = \text{argmin}_{|T|=s} Z(T)$.

On définit la fonction

$$g(c_1, d, s, \beta_{min}, \sigma, \rho(\Sigma)) = (c_1 + 2048)\max\{\log\binom{d-s}{s}, \frac{\log(d-s)}{\rho(\Sigma)\beta_{min}^2/\sigma^2}\}.$$

Ici la quantité $\rho(\Sigma)$ est égale à ρ_S ou ρ_{uni} selon la probabilité d'erreur considérée. Le théorème suivant donne la performance de cet estimateur.

Théorème 1.4. *a. Si* $n > g(c_1, d, s, \beta_{min}, \sigma, \rho_S(\Sigma))$ *pour un certain* $c_1 > 0$ *alors* $q_S(\psi^*) \leq \exp(-c_1(n-s))$.

b. Si $n > g(c_1, d, s, \beta_{min}, \sigma, \rho_{uni}(\Sigma))$ *pour un certain* $c_1 > 0$ *alors* $q_{ave}(\psi^*) \leq \exp(-c_1(n-s))$.

c. Si $n > \log\binom{d}{s} + g(c_1, d, s, \beta_{min}, \sigma, \rho_{uni}(\Sigma))$ *pour un certain* $c_1 > 0$ *alors* $q_{max}(\psi^*) \leq \exp(-c_1(n-s))$.

Le théorème suivant donne une condition nécessaire pour la consistance de l'estimation du support. Dans ce théorème, Σ_s désigne l'ensemble des parties à s éléments dans $\{1, \ldots, d\}$.

Théorème 1.5. *Si la taille de l'échantillon est telle que*

$$n < \max\Big\{\frac{\log\binom{d}{s}}{8\omega_{bu}(\Sigma)\beta_{min}^2/\sigma^2}, \frac{\log(d-s)}{4\omega_{ave}(\Sigma)\beta_{min}^2/\sigma^2}\Big\},$$

où ω_{bu} *et* ω_{ave} *sont des quantités liées à* Σ *(cf. [86] pour la définition), et si* S *est choisi uniformément aléatoirement dans* Σ_k *alors, pour tout estimateur* ψ *de* S*, il existe un vecteur* β^* *de valeur minimale* β_{min} *tel que*

$$q_{max}(\psi) \geq q_{ave}(\psi) \geq 1/2.$$

Faisons quelques remarques par rapport à ces deux théorèmes :

1. Le terme $\log\binom{d-s}{s}$ (ou $\log\binom{d}{s}$), qui n'apparaît pas dans le théorème 1.1, vient du fait qu'on n'utilise pas la perte q_S mais des pertes plus uniformes.
2. Pour $\beta_{min}^2 = O(1/s)$, les deux théorèmes précédents donnent les mêmes conditions : $n \asymp (s + \frac{1}{\beta_{min}^2/\sigma^2})\log(d-s)$.
3. Pour le cas $\beta_{min}^2 = O(1/s)$, le Lasso est optimal en terme de taille d'échantillon minimale garantissant son succès.
4. Pour d'autres valeurs de β_{min}^2, les tailles d'échantillon des deux théorèmes précédents ne sont pas forcément du même ordre.
5. Le Lasso n'est pas optimal pour certains régimes, en particulier dans le cas de la sparsité linéaire, c'ert-à-dire quand $s = \alpha d$ avec $\alpha \in (0, 1)$. Le Lasso échoue si $n \leq c_4 d \log d$ pour une certaine constante $c_4 > 0$ tandis que si la valeur minimale β_{min} ne décroît pas trop vite, la taille d'échantillon correspondant aux deux théorèmes précédents est de l'ordre de d.
6. Il y a encore des cas où l'estimateur de recherche exhaustive ψ^* réussit alors que le Lasso échoue et qui sont liés en particulier à la condition d'incohérence (1.6) nécessaire au Lasso.

Avant d'énoncer les prochains résultats, introduisons quelques notations. Pour tout $\rho > 0$ et tout $s \leq d$, l'ensemble $\mathcal{C}_s^d(\rho)$ est composé des vecteurs $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^d$ tels que $\boldsymbol{\beta}$ contient exactement s coefficients non nuls qui sont tous égaux à $\rho/\sqrt{s}$ et $\mathcal{D}_{n,d}$ l'ensemble des designs tels que les colonnes sont de norme $\sqrt{n}$. Verzelen [85] étudie le cas de "l'ultra

grande dimension". Les résultats précédents montrent que, sous des conditions sur le design $\mathtt{X} \in \mathcal{D}_{n,d}$, il est possible de retrouver S avec une grande probabilité si $\boldsymbol{\beta} \in \mathcal{C}_s^d(\rho)$ avec ρ^2/s^2 de l'ordre de $\frac{s \log d}{n}$. Donc $s \log d$ petit par rapport à n est une condition nécessaire dans la plupart des cas. L'ultra grande dimension correspond au cas où $s \log d$ est grand par rapport à n. Verzelen [85] montre que, dans ce cas, l'estimation consistante du support est presque impossible. Plus précisément on a les deux propositions suivantes, dans lesquelles on suppose que $\sigma = 1$.

Proposition 1.6. *Pour tout* $\rho^2 \leq \frac{C_1}{n}\left(\frac{ed}{s}\right)^{\frac{C_2 s}{n}}$ *(où* C_1 *et* C_2 *sont des constantes) et tout* $s \leq n \wedge d/2$*, on a*

$$\inf_{\mathtt{X} \in \mathcal{D}_{n,d}} \inf_{\psi} \sup_{\boldsymbol{\beta} \in \mathcal{C}_s^d(\rho)} P(\psi \neq S) \geq 1/(e+1).$$

Pour tout design $\mathtt{X} \in \mathcal{D}$, il est donc impossible de retrouver le support S avec une grande probabilité à moins que $\boldsymbol{\beta}$ ne satisfasse

$$\|\boldsymbol{\beta}\|_2^2/\sigma^2 \geq \frac{C_1}{n}\left(\frac{ed}{s}\right)^{\frac{C_2 s}{n}}.$$

Cette quantité explose dans le cadre de l'ultra grande dimension et peut être nettement plus grande que la borne $s \log d/n$ correspondant au cas d'une dimension non ultra grande.

Retrouver le support est donc quasiment impossible mais on pourrait essayer tout de même des techniques de réduction de dimension, c'est-à-dire trouver un ensemble $\hat{M}$ de taille $d_0 < d$ tel que $S \subset \hat{M}$. La proposition suivante montre qu'il est impossible de réduire significativement la dimension du problème à moins que la norme de $\boldsymbol{\beta}$ ne soit très grande.

Proposition 1.7. *On considère un design gaussien avec* $\Sigma = \mathtt{I}_p$*. On suppose que* $d \geq k^3 \vee C$ *et* $n \geq C$ *pour une certaine constante* C*. On pose*

$$\rho^2 = C\frac{s}{n}\log\left(\frac{ed}{s}\right)\exp\left[C_2\frac{s}{n}\log\left(\frac{ed}{s}\right)\right].$$

Alors il existe une constante universelle $0 < \delta < 1$ *telle que pour tout ensemble mesurable* $\hat{M}$ *de* $\{1, \ldots, d\}$ *de taille* $p_0 \leq p^\delta$*, on a*

$$\sup_{\boldsymbol{\beta} \in \mathcal{C}_s^d(\rho)} P(S \not\subset \hat{M}) \geq 1/8.$$

1.5 Examen rapide et sélectif de quelques autres méthodes

On commence par les procédures de discrimination indépendante, qui consistent à ordonner les variables selon leur utilité marginale, c'est-à-dire que chaque variable est utilisée indépendamment comme prédicteur pour décider de son utilité pour prédire la réponse. La procédure SIS (sure independance screening) a été introduite par Fan et Lv [32] pour réduire le coût de calcul dans le cas des très grandes dimensions. Une idée naturelle pour effectuer la sélection de variable dans ce cas est de réduire la dimension d d'un ordre très très grand (disons $\log d \asymp n^a$ pour $a > 0$) à un ordre plus modérément grand (par

exemple une puissance de n) à l'aide d'une procédure rapide mais fiable, et ensuite d'utiliser les méthodes habituelles de sélection de variables (tel le Lasso) sur cet ensemble plus restreint de variables. Ce qu'on appelle procédure fiable ici est une procédure possédant la propriété de "sure screening", qui signifie toutes les variables importantes sont dans le modèle sélectionné avec une probabilité tendant vers 1. Un exemple de discrimination indépendante est la régression marginale étudiée dans [32]. Les variables sont classées selon la magnitude de leur coefficient de corrélation empirique avec la réponse. Comme indiqué précédemment, cela réduit la dimension du modèle car on choisit les p plus grandes avec $p \gg n$ mais $p \ll d$. Pour les problèmes de classification, la procédure est appelée FAIR dans [31].

Le cas des modèles linéaires généralisés est traité dans [33] et [37]. Le modèle linéaire généralisé est défini dans la Sous-section 1.3.2 (cf. (1.9)). On rappelle que la fonction de log-vraisemblance est donnée par $l_n(\boldsymbol{\beta}) = n^{-1}\sum_{i=1}^n \ell(\boldsymbol{x}_i^T\beta, y_i)$ avec $\ell(\theta, y) = b(\theta) - y\theta$. L'estimateur du maximum de vraisemblance marginal (MMLE) $\hat{\boldsymbol{\beta}}_j^M$ est défini comme le maximiseur de la régression par composante

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_j^M = (\hat{\beta}_{j,0}^M, \hat{\beta}_j^M) = \text{argmin}_{\beta_0,\beta_j} \sum_{i=1}^n \ell(\beta_0 + \beta_j \mathtt{X}_{ij}, y_i).$$

Ceci peut être aisément calculé et son implémentation est robuste, évitant l'instabilité numérique dans les problèmes de très grande dimension. On sélectionne ensuite les coefficients de taille assez grande

$$\hat{\mathcal{M}}_{\gamma_n} = \{1 \le j \le d : |\hat{\beta}_j^M| \ge \gamma_n\}.$$

Pour comprendre le MMLE, on prend la version population du minimiseur de la régression par composante

$$\boldsymbol{\beta}_j^M = (\beta_{j,0}^M, \beta_j^M) = \text{argmin}_{\beta_0,\beta_j} \sum_{i=1}^n E\ell(\beta_0 + \beta_j \mathtt{X}_{ij}, Y_i).$$

Sous certaines conditions, ce coefficient est lié à la covariance entre y et $\boldsymbol{x}_j$. En particulier si les variables pertinentes sont telles que $\text{Cov}(\boldsymbol{x}_j, y) \ge c_1 n^{-\kappa}$, $j \in S$ et $c_1 > 0$, alors il existe une constante c_2 telle que

$$\min_{j\in S} |\beta_j^M| \ge c_2 n^{-\kappa}.$$

On obtient alors la propriété de "sure screening" en prenant $\gamma_n \asymp n^{-\kappa}$ si $\kappa < 1/2$. Concernant la taille maximum de la dimension d que cette méthode permet, elle est d'ordre exponentielle : pour le modèle linéaire gaussien $\log d = o(n^{(1-2\kappa)/4})$ et pour la régression logistique avec des variables bornées, $\log d = o(n^{1-2\kappa})$. Quant à la taille du modèle sélectionné, sous certaines conditions de régularité,

$$|\hat{\mathcal{M}}_{\gamma_n}| = O(n^{2\kappa}\lambda_{max}(\Sigma)),$$

où $\lambda_{max}(\Sigma)$ désigne la plus grande valeur propre de Σ.

Afin de réduire le nombre de "faux positifs", c'est-à-dire le nombre de variables de S^c sélectionnées, Fan et al. [37] suggèrent une technique de rééchantillonnage : on sépare l'échantillon en deux parties et si on appelle $\hat{\mathcal{M}}_1$ et $\hat{\mathcal{M}}_2$ les ensembles de variables sélectionnées à partir de ces deux échantillons, alors en supposant que ces deux ensembles vérifient la propriété de "sure screening", les auteurs montrent que, avec une grande probabilité, l'intersection de ces deux ensembles, en plus de contenir toutes les variables importantes, a beaucoup moins de faux positifs.

Fan et Lv [32] mettent en lumière trois problèmes potentiels avec le SIS :

a. (faux négatifs) Un prédicteur important qui est jointement corrélé mais marginalement non corrélé avec la réponse n'est pas choisi par le SIS. Un exemple : si le vecteur de variables $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ est normal avec des corrélations toutes égales à ρ et vérifie pour un entier J

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{\beta} = x_1 + \ldots + x_J - J\rho x_{J+1}.$$

Ce problème peut se produire même avec n grand et d petit et est parfois appelé "unfaithfulness" dans la littérature. Il n'est pas spécifique à la corrélation marginale, mais est particulièrement sensible pour cette méthode.

b. (faux positifs) Des prédicteurs non pertinents mais qui sont très corrélés avec la réponse peuvent être sélectionnés prioritairement par SIS par rapport à des variables importantes moins corrélées. Un exemple :

$$y = \rho x_0 + x_1 + \ldots + x_J + w,$$

où x_0 est indépendant des autres variables qui ont une corrélation commune ρ. Alors les variables x_j pour $j > J$ ont plus une plus grande priorité de sélection que la variable pertinente x_0.

c. Le problème général de la collinéarité entre les prédicteurs ajoute une difficulté au problème de sélection de variable.

Fan et Lv [32] proposent, pour réduire ces problèmes, une procédure itérative, ISIS, qui étend SIS et utilise plus l'information jointe des variables. Fan et al. [37] étendent l'idée de ISIS à des fonctions de perte plus générales. Supposons de manière générale que l'objectif est de trouver $\boldsymbol{\beta}$ sparse minimisant

$$n^{-1}\sum_{i=1}^{n} L(y_i, \boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{\beta}) + \sum_{j=1}^{d} p_\lambda(|\beta_j|).$$

L'algorithme est le suivant :

1. Appliquer SIS : on obtient un ensemble $\mathcal{A}_1$ d'indices de taille k_1 et ensuite employer une méthode de vraisemblance pénalisée pour sélectionner un sous ensemble $\mathcal{M}_1$ de ces indices.
2. Calculer

$$L_j^{(2)} = \min_{\beta_0, \beta_{\mathcal{M}_1}, \beta_j} n^{-1}\sum_{i=1}^{n} L(y_i, \beta_0 + \boldsymbol{x}_{i,\mathcal{M}_1}^T\boldsymbol{\beta}_{\mathcal{M}_1} + \mathtt{X}_{ij}\beta_j),$$

pour $j \notin \mathcal{M}_1$ où $\boldsymbol{x}_{i,\mathcal{M}_1}$ est le sous-vecteur de $\boldsymbol{x}_i$ formé par les composantes dans $\mathcal{M}_1$. Ceci mesure la contribution additionnelle de la variable j en présence des variables $\boldsymbol{x}_{\mathcal{M}_1}$. On choisit k_2 variables avec les plus petits $\{L_j^{(2)}, j \notin \mathcal{M}_1\}$ et on appelle $\mathcal{A}_2$ l'ensemble résultant.

3. Utiliser la vraisemblance pénalisée pour obtenir

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_2 = \text{argmin}_{\beta_0,\beta_{\mathcal{M}_1},\beta_{\mathcal{A}_2}} n^{-1} \sum_{i=1}^{n} L(y_i, \beta_0 + \boldsymbol{x}_{i,\mathcal{M}_1}^T \boldsymbol{\beta}_{\mathcal{M}_1} + \mathtt{X}_{i,\mathcal{A}_2} \beta_{j,\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{A}_2}) + \sum_{\mathcal{A}_2} p_\lambda(|\beta_j|).$$

Cela donne un nouvel ensemble d'indices $\mathcal{M}_2$ consistant en les éléments non nuls du vecteur $\hat{\boldsymbol{\beta}}_2$.

4. Itérer les deux étapes précédentes jusqu'à ce qu'un nombre prescrit de variables soit sélectionné, ou jusqu'à ce que $\mathcal{M}_\ell = \mathcal{M}_{\ell-1}$.

Fan et al. [37] montrent empiriquement que ISIS améliore significativement la performance de SIS même dans les trois cas difficiles décrits précédemment.

Wasserman et Roeder [89] examinent aussi une procédure à plusieurs étapes ("screen and clean"). Le cadre est le modèle linéaire avec des erreurs gaussiennes. La dimension d peut être d'un ordre exponentiel en n et s est supposé constant. Des hypothèses sur les valeurs propres de $\mathtt{X}_S^T \mathtt{X}_S$ sont imposées. La première étape fournit un ensemble de modèles candidats indexé par un paramètre $\lambda : \mathcal{S} = \{\hat{S}_n(\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$. La seconde sélectionne un de ces modèles $\hat{S}_n$ en utilisant la validation croisée pour sélectionner $\hat{\lambda}$ à partir d'un ensemble Λ_n de cardinal choisi de telle façon que toutes les variables pertinentes appartiennent à l'ensemble $\hat{S}_n$. Dans l'étape 3, on élimine certaines variables par des tests d'hypothèses, ce qui donne un ensemble de variable $\hat{D}_n$. Pour l'étape 1, trois méthodes sont considérées : le Lasso, une version de la stagewise régression où le paramètre λ représente le nombre d'étapes et où l'arrêt se fait après un nombre donné d'étapes, et enfin la régression marginale : $\hat{S}_n(\lambda) = \{j : |\hat{\mu}_j| > \lambda\}$ où $\hat{\mu}_j$ est le coefficient de régression marginale. Les auteurs montrent que pour ces trois méthodes, $\hat{D}_n$ est consistant pour la sélection de variables.

On va maintenant parler des notions de FDR ("false discovery rate", cf. [1]) et de "higher criticism" (HC, cf. [26]). Ces deux notions apparaissent dans les problèmes de tests d'hypothèses multiples : on teste les N hypothèses H_{0i} contre H_{1i}, $i = 1, 2, \ldots, N$. L'approche traditionnelle est de contrôler le taux d'erreur par famille au niveau α, c'est-à-dire d'utiliser une procédure de test qui contrôle au niveau α la probabilité de rejeter à tort ne serait-ce qu'une seule hypothèse vraie H_{0i}. La procédure de Bonferroni assure ceci en testant chaque hypothèse au niveau α/N. Cette procédure est critiquée pour être trop conservative, elle manque de puissance pour détecter les hypothèses alternatives. On peut au contraire chercher seulement à contrôler le rapport espéré du nombre d'hypothèses rejetées à tort par rapport au nombre d'hypothèses rejetées. Ce rapport est appelé FDR. Contrôler le FDR permet d'obtenir des procédures plus puissantes. Voici une procédure pour contrôler le FDR : supposons qu'on a une collection de N P-values P_i qui, sous l'hypothèse nulle globale, sont uniformément distribuées. On les range par ordre croissant : $P_{[1]} \leq \ldots \leq P_{[N]}$. Sous l'hypothèse nulle globale, ces statistiques d'ordre ont les propriétés habituelles des statistiques d'ordre uniformes, incluant la normalité asymptotique $P_{[i]} \sim_{approx} \text{Normal}(i/N, i/N(1 - i/N))$.

La procédure FDR de test multiple consiste à rejeter toutes les hypothèses H_{0i} correspondant aux indices $i = 1, \ldots, \hat{k}_F$ où

$$\hat{k}_F = \max\{k : P_{[k]} \leq (k/N)q\}.$$

Considérons maintenant la statistique de test HC, définie par

$$HC^* = \max_{1 \leq i \leq \alpha_0 N} HC(i, P_{[i]}),$$

où α_0 est fixé dans $(0, 1)$ et

$$HC(i, P_{[i]}) = \sqrt{N} \frac{i/N - P_{[i]})}{i/N(1 - i/N)}.$$

Donoho et Jin [26] utilisent la statistique HC pour le problème de classification dans le modèle RW (pour "rare and weak") où seulement une petite fraction des variables sont utiles et où chaque variable contribue faiblement à la décision de classification. Le vecteur de variables prédictives est supposé être normal de moyenne $y\mu$, où $\mu \in \mathbb{R}^d$ est un vecteur inconnu, et de matrice de covariance $\mathtt{I}_d$.

On considère les covariances empiriques $z(j) = n^{-1/2} \sum_{i=1}^n y_i \mathtt{X}_{ij}$ pour $j = 1, \ldots, d$. Les hypothèses nulles sont ici $H_{0j} : \mathrm{Cov}(y, \boldsymbol{x}_j) = 0$. Les hypothèses imposées à $\boldsymbol{x}$ impliquent que $\boldsymbol{z} \sim N(\sqrt{n}\mu, \mathtt{I}_d)$. Les P-values utilisées sont alors $P_j = P(|N(0, 1)| > |z(j)|)$.

Meinshausen et Bühlmann [70] introduisent la sélection stable (stability selection). Ce n'est pas vraiment une nouvelle technique mais plutôt une amélioration des méthodes existantes. C'est une méthode très générale qui a un large champ d'applications.

Traditionnellement, la sélection de variables revient à choisir un élément de l'ensemble de modèles obtenus à partir d'une certaine méthode $\{\hat{S}_n(\lambda), \lambda \in \Lambda\}$. Il y a typiquement deux problèmes : d'abord le modèle correct peut ne pas faire partie de cet ensemble. Ensuite, même s'il en est membre, il est très difficile de trouver le bon paramètre pour retrouver S en grande dimension. Avec la sélection stable, à la place de sélectionner un modèle de la liste, on perturbe les données un grand nombre de fois et on choisit les variables qui sont sélectionnées un grand nombre de fois. Cette perturbation des données peut se faire par sous-échantillonnage : on fait un grand nombre de fois un tirage sans remise de $\lfloor n/2 \rfloor$ éléments de l'échantillon initial et on lui applique la méthode choisie (par exemple Lasso). Cette dernière méthode était déjà utilisée par Bach sous le nom de Bolasso (boostrapped lasso). Les auteurs donnent aussi l'exemple du Lasso randomisé : la méthode Lasso est appliquée un grand nombre de fois avec des poids aléatoires sur les valeurs absolues des coefficients $|\beta_j|$.

La sélection stable permet de contrôler le taux de faux positifs. Elle améliore la méthode de base utilisée. En particulier, le Lasso randomisé est consistant en terme de sélection de variable même si les conditions nécessaires pour le Lasso ne sont pas vérifiées.

Mentionnons maintenant quelques autres méthodes. Alquier [3] utilise des procédures de sélection de variables itératives. Hebiri [44] considère la prédiction conforme, l'approche bayésienne est étudiée dans [79]. Des extensions à d'autres cadres incluant la régression logistique et le modèle Ising sont traitées dans [14, 75], respectivement.

1.6 Sélection de variables dans le contexte de variables groupées

La sélection de variables dans le contexte de variables groupées avec des groupes disjoints ou se chevauchant est étudiée dans [92, 55, 64, 72, 46]. Des procédures hiérarchiques pour la sélection de variables ont été proposées par [5, 55, 9, 96]. En particulier Pontil et al. [64] considèrent le modèle linéaire (1.2) avec un bruit gaussien (avec une extension à des distributions de bruit plus générales) mais où on a une information a priori sur le support du vecteur $\boldsymbol{\beta}$: l'ensemble des variables est partitionné en un ensemble de groupes $G_1, \ldots, G_M$, et on suppose que le vecteur $\boldsymbol{\beta}$ est groupe-sparse, c'est-à-dire que les variables pertinentes sont rassemblées dans un nombre restreint de ces groupes. Cette hypothèse suggère d'utiliser la méthode du groupe Lasso pour estimer $\boldsymbol{\beta}$ et le support S. L'estimateur correspondant est solution du problème d'optimisation

$$\min \Big\{ \frac{1}{n} \|\mathtt{X}\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{y}\|^2 + 2 \sum_{j=1}^{M} \lambda_j \|\boldsymbol{\beta}^j\| : \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^d \Big\},$$

où, pour tout j, $\boldsymbol{\beta}^j$ est formé des composantes de $\boldsymbol{\beta}$ dont les indices appartiennent au groupe G_j et les λ_j sont des paramètres de régularisation. Pontil et al. montrent que le groupe Lasso peut être plus performant que le Lasso en terme de prédiction et d'estimation. Ces résultats sont appliqués aux équations de régression multiple et à l'apprentissage multi-tâche.

Obozinski et al. [72] s'intéressent plus particulièrement à l'estimation du support dans le modèle de régression multivarié $\mathtt{Y} = \mathtt{XB} + \mathbf{w}$ avec $\mathtt{Y} \in \mathbb{R}^{n \times K}$, une matrice de coefficients de régression $\mathtt{B}$ de dimension $M \times K$, un bruit $\mathbf{w}$ et un design $\mathtt{X}$ gaussiens. Si $\mathtt{B} = (\beta_{ij})_{1 \le i \le M, 1 \le j \le K}$, le problème d'optimisation du groupe Lasso multivarié s'écrit (avec ici un seul paramètre de régularisation λ)

$$\min \Big\{ \frac{1}{n} \|\mathtt{XB} - \mathtt{Y}\|_F^2 + 2\lambda \sum_{i=1}^{M} \big(\sum_{j=1}^{K} |\beta_{ij}|^2 \big)^{1/2} : \mathtt{B} \in \mathbb{R}^{M \times K} \Big\}$$

où $\|.\|_F$ désigne la norme de Frobenius. Ici le support S correspond à l'union des supports S_k, pour $k = 1, \ldots, K$, où $S_k = \{i \in \{1, \ldots, M\} : \beta_{ik} \neq 0\}$. En grande dimension, Obozinski et al. [72] montrent que, sous des conditions sur la matrice de design du même type que pour le Lasso, le groupe Lasso multivarié réussit à retrouver le support S avec une grande probabilité si la quantité $n/(\psi(\mathtt{B}) \log(M - s))$ excède un seuil critique θ_u et échoue s'il est inférieur à un certain seuil θ_l. Ici $\psi(B)$ est une fonction mesurant les sparsités et le chevauchement des vecteurs coefficients de régression du modèle. En particulier, dans le cas d'un design gaussien standard : $\theta_u = \theta_l$. L'examen de la fonction $\psi(\mathtt{B})$ montre que, dans le cas d'un design non corrélé sur ses lignes actives, le groupe Lasso multivarié a une performance jamais inférieure à celle du Lasso. De plus, quand les vecteurs de régression sont proches de l'orthogonalité, la taille d'échantillon nécessaire pour le succès du Lasso multivariée est nettement inférieure à celle du Lasso ordinaire. Au contraire, pour des

designs plus généraux, il est possible que le Lasso ordinaire soit plus performant que le Lasso multivarié.

1.7 Cas non paramétrique

On s'intéresse à la sélection de variables dans le contexte de la régression non-linéaire en grande dimension. Soit $f : [0,1]^d \to \mathbb{R}$ la fonction de régression inconnue. On suppose que pour un certain sous-ensemble J de l'ensemble d'indices $\{1,\dots,d\}$ satisfaisant $\mathrm{Card}(J) \leq d^*$, il existe une fonction $\bar{f} : \mathbb{R}^{\mathrm{Card}(J)} \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(\boldsymbol{x}) = \bar{f}(\boldsymbol{x}_J), \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Lafferty et Wassermann [59] considèrent le modèle de régression nonparamétrique gaussien. La fonction de régression inconnue appartient à une boule de Sobolev d'ordre deux et est supposée quatre fois différentiable avec des dérivées bornées jusqu'à l'ordre quatre. Le dispositif expérimental a une densité continument différentiable et strictement positive. Ils s'intéressent à l'estimation ponctuelle de f en un point $\boldsymbol{x}$. Leur stratégie, appelée rodeo, est locale et sélectionne simultanément les fenêtres et les variables. La méthode démarre avec un estimateur par polynôme local $\hat{f}_{\mathbf{h}}(\boldsymbol{x})$ en choisissant des fenêtres $\mathbf{h} = (h_1,\dots,h_d)$ suffisamment grandes pour toutes les variables. Si la dérivée de cet estimateur par rapport à une variable donnée j, $z_j = \frac{\partial \hat{f}_{\mathbf{h}}(\boldsymbol{x})}{\partial h_j}$, dépasse un certain seuil, on diminue la fenêtre correspondante . Cela donne l'algorithme suivant :

1. Choisir une constante $0 < \beta < 1$ et une fenêtre initiale $h_0 = \frac{c_0}{\log\log n}$ (c_0 est une constante)
2. Initialiser les fenêtres et activer toutes les variables :
   (a) $h_j = h_0, j = 1, 2 \dots d$.
   (b) $\mathcal{A} = \{1, 2, \dots, d\}$.
3. Tant que $\mathcal{A}$ est non vide, pour chaque $j \in \mathcal{A}$:
   (a) Calculer z_j et sa variance conditionnelle $s_j = \mathrm{var}(z_j | \boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n)$.
   (b) Calculer le seuil $\lambda_j = s_j\sqrt{2\log n}$.
   (c) Si $|z_j| > \lambda_j$, alors $h_j \leftarrow \beta h_j$; sinon enlever j de $\mathcal{A}$.
4. Calculer l'estimateur $\tilde{m}(\boldsymbol{x}) = \hat{m}_{\mathbf{h}^*}(\boldsymbol{x})$ où $\mathbf{h}^*$ est la fenêtre à la sortie de 3.

L' estimateur atteint le taux $n^{-\frac{4}{4+d^*+\epsilon}}$ pour tout $\epsilon > 0$, pourvu que $d = O(\frac{\log n}{\log\log n})$ et $d^* = O(1)$. L'hypothèse d'identifiabilité concerne la dérivée seconde de f :

$$\lim_{n\to\infty} \inf \min_{j\in J} |f_{jj}(\boldsymbol{x})| > 0.$$

Si f est linéaire, le rodeo ne retrouvera pas les variables pertinentes. Les auteurs suggèrent d'utiliser d'abord une méthode de sélection de variables linéaire, par exemple le Lasso, et ensuite d'utiliser le rodeo sur les résidus en utilisant toutes les variables.

Le nombre d'étapes de l'algorithme est, avec une grande probabilité, de l'ordre de $\log\left(\frac{n}{\log n(\log\log n)^d}\right)$.

La méthode du rodeo est locale, mais les auteurs pensent qu'on peut étendre l'idée à la sélection globale de fenêtre et de variables en moyennant sur différents points d'évaluations.

Bertin et Lecué [8] considèrent une procédure de pénalisation l_1 dans le même modèle. Leur procédure est aussi locale, appliquée en un point $\boldsymbol{x}$. La fonction de régression est supposée $\beta-$Holdérienne avec $\beta > 1$. L'hypothèse d'identifiabilité est la suivante : pour tout $j \in J$, $|\partial_j f(\boldsymbol{x})| \geq C$ pour une constante C (dépendant d'autres constantes du problème). Les restrictions sur d et d^* sont : $d^* = O(1)$ et $d = O(\log n)$. La densité g du dispositif expérimental est supposée bornée, Lipschitzienne autour de $\boldsymbol{x}$, et telle qu'il existe des constantes $\mu_m > 0$ et $\mu_M > 1$ avec $\mu_m < g < \mu_M$ au voisinage de $\boldsymbol{x}$. Contrairement au rodeo, la sélection de variables et l'estimation ponctuelle (ou une autre estimation) sont effectuées en deux étapes distinctes. Pour l'étape de sélection, on remarque que le vecteur des dérivées $(\theta_1^*, \ldots, \theta_d^*)$ où $\theta_i^* = h\partial_i f(x)$ est sparse et $J = \{j : \theta_j^* \neq 0\}$. Les auteurs utilisent alors une pénalisation l_1 d'estimateurs par polynômes locaux que l'on décrit ici :

$$\bar{\Theta}(\lambda) = \text{argmin}_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^{d+1}} \left[\frac{1}{nh^d} \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \mathbf{u}\left(\frac{\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}}{h} \right) \boldsymbol{\theta} \right)^2 K\left(\frac{\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}}{h} \right) + 2\lambda ||\boldsymbol{\theta}||_1 \right],$$

où $\mathbf{u}(\mathbf{v}) = (1, v_1, \ldots, v_d)$ pour tout $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_d) \in \mathbb{R}^d$, $h > 0$ une fenêtre, $\lambda > 0$ un paramètre de régularisation et K un noyau vérifiant certaines conditions habituelles. Un vecteur $\bar{\boldsymbol{\theta}}$ est choisi dans $\bar{\Theta}(\lambda)$ et l'estimateur $\hat{J}$ de J correspond à l'ensemble des coordonnées non nulles de $\bar{\boldsymbol{\theta}}$ (hormis la coordonnée zero).

Etant donné que la méthode est locale, le nombre de données passe de n à nh^d, donc même si $0 < h < 1$ ne tend pas vers 0 , d ne peut pas être d'ordre supérieur à $\log n$.

Bickel, Ritov et Tsybakov [9] étudient un modèle de régression avec des erreurs centrées conditionnellement à $\mathtt{X}$, et $\mathtt{X} = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_d) \in \mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_d$, les $\mathcal{X}_j$ étant des sous-ensembles d'espaces euclidiens. Ils considèrent une approximation de la fonction de régression dans une base construite à partir d'une collection de fonctions $(\phi_{i,j})_{i=1\ldots d, j=0\ldots,L}$. Les auteurs prennent ensuite tous les produits possibles de ces fonctions et supposent qu'il existe une représentation sparse de la fonction de régression dans cette base.

Un estimateur de type Lasso peut choisir parmi un nombre de coefficients qui augmente exponentiellement en n. Mais ici le nombre de coefficients du modèle est $(L+1)^d$, ce qui peut rendre le Lasso numériquement infaisable. Les auteurs suggèrent alors de procéder à une sélection hierarchique : la première étape de l'itération consiste à sélectionner un nombre prédéfini K de fonctions parmi les fonctions d'une variable (la méthode est expliquée dans le paragraphe suivant). L'étape suivante démarre avec les mêmes fonctions candidates que l'étape précédente, plus toutes les interactions entre les K fonctions sélectionnées à l'étape précédente. Les fonctions d'une variable sont traitées de façon privilégiée. Au contraire, les interactions sont considérées avec une suspicion qui croît avec leur multiplicité : elles ne peuvent être candidates à l'inclusion que si leurs ancêtres ont été inclus dans le modèle précédemment.

Naïvement, la procédure de sélection appliquée à chaque étape aurait pu être une procédure Lasso stoppée quand le nombre de variables sélectionnées est égal à K. Les auteurs suggèrent par un exemple que cette méthode n'est pas judicieuse. L'algorithme Lasso sélectionne bien un petit modèle mais ne retrouve pas toujours les variables pertinentes, surtout s'il y a des problèmes de multicolinéarité. Ils proposent alors une procédure en

deux étapes : on lance le Lasso jusqu'à ce qu'il donne un modèle plus complexe que celui désiré, mais pas trop complexe, de sorte qu'une méthode standard de sélection ou une méthode randomisée puisse être utilisée. Les auteurs proposent un estimateur randomisé tel que son risque de prédiction est proche de celui de départ et qui n'a que K composantes non nulles au plus.

Pour finir, mentionnons que les problèmes d'estimation et de tests d'hypothèses pour la régression nonparamétrique en grande dimension pour des modèles additifs sparses ont été récemment traités dans [57, 74, 41, 34]. Pour ce modèle on suppose que la fonction f est la somme de d fonctions univariées $f(x_1, \ldots, x_d) = \sum_{j=1}^{d} f_j(x_j)$ où seulement s fonctions sont non nulles. Raskutti et al. [74] considèrent le cas où chaque f_j appartient à un espace de Hilbert à noyau reproduisant (RKHS) et analysent une méthode pour estimer f en basée sur des noyaux en combinaison avec une régularisation L_1. Fan et al. [34] étendent les résultats des méthodes SIS et ISIS (cf. [33] et la Section 1.5) à ce modèle.

Chapitre 2

Sélection de variables pour la régression nonparamétrique

Ce chapitre traite du probleme de sélection de variables pertinentes dans un modèle nonparamétrique dont le paramètre est une fonction dépendant d'un grand nombre de variables. L'approche adoptée est purement nonasymptotique. On regroupe ici les resultats des articles [19, 20, 21] et quelques extensions originales. Le chapitre est organisé de manière suivante. Les notations et hypothèses nécessaires pour énoncer les principaux résultats sont présentés dans la Section 3.2. Dans la Section 2.2, un estimateur de l'ensemble des variables pertinentes est introduit et sa consistance est établie, dans le cas où les données viennent du modèle de bruit blanc gaussien. La principale condition requise pour la consistance fait intervenir le nombre de points à coordonnées entières dans une boule d'un espace euclidien de grande dimension. Un équivalent asymptotique de ce nombre est présenté en Section 2.3. Des résultats sur l'impossibilité de l'estimation consistante du support sont énoncés en Section 2.4. La Section 2.5 est consacrée à l'adaptation par rapport aux paramètres inconnus (régularité et degré de pertinence) et aux taux minimax de séparation. Ensuite, en Section 2.6, on montre que certains résultats peuvent être étendus au modèle de régression nonparamétrique. On étudie les relations entre les résultats sur la consistance et l'inconsistance dans la Section 2.7. Les parties techniques des preuves sont reportées dans les appendices.

2.1 Formulation du problème et hypothèses

On s'intéresse à la sélection de variables dans le contexte de la régression non-linéaire en grande dimension. Soit $\mathsf{f} : [0,1]^d \to \mathbb{R}$ la fonction de régression inconnue. On suppose que le nombre de variables d est très grand, possiblement bien plus grand que la taille de l'échantillon n, mais seulement un petit nombre de ces variables contribue aux fluctuations de la fonction de régression f.

Plus précisément, on suppose que pour un certain sous-ensemble J de l'ensemble d'in-

dices $\{1,\dots,d\}$ satisfaisant $\mathrm{Card}(J) \le d^*$, il existe une fonction $\bar{\mathsf{f}} : \mathbb{R}^{\mathrm{Card}(J)} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\mathsf{f}(\boldsymbol{x}) = \bar{\mathsf{f}}(\boldsymbol{x}_J), \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d,$$

où $\boldsymbol{x}_J$ désigne le sous-vecteur de $\boldsymbol{x}$ obtenu en enlevant de $\boldsymbol{x}$ toutes les coordonnées dont les indices n'appartiennent pas à J. On appellera J support de sparsité de la fonction f. Dans ce qui suit, on permet à d et d^* de dépendre de n mais on n'indique pas toujours cette dépendance dans les notations. Remarquons aussi que la véritable dimension intrinsèque est $\mathrm{Card}(J)$; d^* est simplement une borne supérieure connue pour la dimension intrinsèque. Dans la suite, on utilise la notation standard pour les normes de suites et de vecteurs :

$$\|\boldsymbol{x}\|_0 = \sum_j \mathbf{1}(x_j \neq 0), \qquad \|\boldsymbol{x}\|_p^p = \sum_j |x_j|^p, \ \forall p \in [1,\infty), \qquad \|\boldsymbol{x}\|_\infty = \sup_j |x_j|,$$

pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ ou $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Soulignons ici que le principal but de ce travail est de comprendre quand il est possible d'estimer le support de sparsité J (avec des garanties théoriques sur la convergence de l'estimateur) et quand c'est impossible. La construction de l'estimateur que l'on définit dans les sections suivantes a pour but de montrer la possibilité d'une estimation consistante, plutôt que de fournir une procédure pratique pour retrouver le support de sparsité. En conséquence, on permet à l'estimateur de dépendre des différentes constantes apparaissant dans les conditions imposées à la fonction de régression f et de certaines caractéristiques du bruit.

Pour réaliser l'estimation consistante de l'ensemble J, on impose certaines hypothèses de régularité et d'identifiabilité à f. De façon à décrire l'hypothèse de régularité imposée à f, on introduit la base trigonométrique de Fourier sur $[0,1]^d$: $\varphi_{\mathbf{0}} \equiv 1$ et

$$\varphi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \sqrt{2}\cos(2\pi\, \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{k} \in (\mathbb{Z}^d)_+, \\ \sqrt{2}\sin(2\pi\, \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}), & -\boldsymbol{k} \in (\mathbb{Z}^d)_+, \end{cases} \tag{2.1}$$

où on note $(\mathbb{Z}^d)_+$ l'ensemble de tous les $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ tels que la première coordonnée non nulle de $\boldsymbol{k}$ est strictement positive et $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}$ représente le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^d$. Par la suite, on utilise la notation $\langle\cdot,\cdot\rangle$ pour désigner le produit scalaire dans $L^2([0,1]^d;\mathbb{R})$, c'est-à-dire $\langle \mathsf{h}, \tilde{\mathsf{h}}\rangle = \int_{[0,1]^d} \mathsf{h}(\boldsymbol{x})\tilde{\mathsf{h}}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}$ pour tout $\mathsf{h}, \tilde{\mathsf{h}} \in L^2([0,1]^d;\mathbb{R})$. En utilisant la base orthonormale φ_k, on définit

$$\Sigma_L = \left\{ f : \sum\nolimits_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d} k_j^2 \langle \mathsf{f}, \varphi_{\boldsymbol{k}}\rangle^2 \le L; \quad \forall j \in \{1,\dots,d\} \right\}.$$

Pour simplifier les notations, on pose $\theta_{\boldsymbol{k}}[\mathsf{f}] = \langle \mathsf{f}, \varphi_{\boldsymbol{k}}\rangle$ pour tout $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^d$. En plus de la régularité, on a besoin d'exiger que les variables pertinentes le soient suffisamment pour rendre leur identification possible, ce qui est réalisé par la condition suivante

[C1(κ, L)**]** La fonction de régression f appartient à Σ_L. De plus, pour un certain sous ensemble $J \subset \{1,\dots,d\}$ de cardinal $\le d^*$, il existe une fonction $\bar{\mathsf{f}} : \mathbb{R}^{\mathrm{Card}(J)} \to \mathbb{R}$ telle que $\mathsf{f}(\boldsymbol{x}) = \bar{\mathsf{f}}(\boldsymbol{x}_J)$, $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ et on a

$$Q_j[\mathsf{f}] = \sum_{\boldsymbol{k}: k_j \neq 0} \theta_{\boldsymbol{k}}[\mathsf{f}]^2 \ge \kappa, \ \forall j \in J. \tag{2.2}$$

On vérifie aisément que $Q_j[\mathsf{f}] = 0$ pour tout j n'appartenant pas au support de sparsité. Ceci fournit une caractérisation du support de sparsité comme l'ensemble des indices des coefficients non nuls du vecteur $\boldsymbol{Q}[\mathsf{f}] = (Q_1[\mathsf{f}], \ldots, Q_d[\mathsf{f}])$.

Avant de décrire les procédures pour estimer J, commentons la condition **[C1]**. Il est important de remarquer que la condition d'identifiabilité (2.2) peut être réécrite $\int_{[0,1]^d} \big(\mathsf{f}(\boldsymbol{x}) - \int_0^1 \mathsf{f}(\boldsymbol{x})\, dx_j\big)^2 d\boldsymbol{x} \geq \kappa$ et, en conséquence, n'est pas intrinséquement liée à la base que l'on a choisie. Dans le cas d'une fonction continument différentiable et 1-périodique f, l'hypothèse de régularité $\mathsf{f} \in \Sigma_L$ peut être réécrite sans utiliser la base trigonométrique, puisque $\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d} k_j^2 \theta_{\boldsymbol{k}}[\mathsf{f}]^2 = (2\pi)^{-2} \int_{[0,1]^d} [\partial_j \mathsf{f}(\boldsymbol{x})]^2\, d\boldsymbol{x}$. Ainsi, la condition **[C1]** est essentiellement une contrainte sur la fonction f elle-même et pas sur sa représentation dans une base précise de fonctions trigonométriques.

Les résultats de ce travail peuvent être étendus à d'autres types de conditions de régularité imposées à f, telles qu'une continuité Hölderienne ou une regularité de Besov. Dans ces cas, la base trigonométrique (2.1) devrait être remplacée par une base adaptée à la condition de régularité (spline, ondelette, etc.). De plus, même dans le cas d'une régularité de Sobolev, on peut remplacer l'ensemble Σ_L correspondant à l'ordre de régularité 1 par tout ellipsoïde de Sobolev de régularité $\beta > 0$. En gros, le rôle de l'hypothèse de régularité est de réduire le modèle statistique à paramètre infini-dimensionnel f à un modèle fini-dimensionnel ayant de bonnes propriétés d'approximation. Toute valeur de l'ordre de régularité $\beta > 0$ mène à cette réduction. La valeur $\beta = 1$ est choisie seulement par simplicité d'exposition. Des extensions à $\beta > 0$ quelconque et aux ondelettes sont traitées dans la Section 2.8.

2.2 Cadre idéalisé : modèle de bruit blanc gaussien

De façon à transcrire les principales idées sans s'occuper des détails techniques, on traite d'abord du modèle de bruit blanc gaussien. En effet il a été prouvé que ce modèle est asymptotiquement équivalent au modèle de régression [12, 76], et aussi équivalent à d'autres modèles paramétriques [13, 23, 71, 42]. Ainsi, on suppose que les données disponibles consistent en un processus gaussien $\{\boldsymbol{Y}(\phi) : \phi \in L^2([0,1]^d; \mathbb{R})\}$ tel que

$$\mathbb{E}_{\mathsf{f}}[\boldsymbol{Y}(\phi)] = \int_{[0,1]^d} \mathsf{f}(\boldsymbol{x})\, \phi(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}, \qquad \mathbf{Cov}_f(\boldsymbol{Y}(\phi), \boldsymbol{Y}(\phi')) = \frac{1}{n} \int_{[0,1]^d} \phi(\boldsymbol{x})\phi'(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}.$$

Il est bien connu que ces deux propriétés caractérisent de façon unique la distribution de probabilité du processus gaussien. Une représentation alternative de $\boldsymbol{Y}$ est

$$dY(\boldsymbol{x}) = \mathsf{f}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} + n^{-1/2} dW(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x} \in [0,1]^d,$$

où $W(\boldsymbol{x})$ est un mouvement brownien d-dimensionnel. Remarquons que l'estimation et la détection minimax de la fonction f dans ce cadre (mais sans l'hypothèse de sparsité) a été étudiée par [54].

2.2.1 Estimation de J par un test à hypothèses multiples

On essaie de traiter le problème de sélection de variables par un test à hypothèses multiples ; chaque hypothèse concerne un groupe de coefficients de Fourier du signal observé et suggère que tous les éléments à l'intérieur du groupe sont nuls. La logique derrière cette approche est basée sur l'observation suivante : puisque la base trigonométrique est orthonormale et contient la fonction constante,

$$j \notin J \quad \Longleftrightarrow \quad \theta_{\boldsymbol{k}}[\mathsf{f}] = \langle f, \varphi_{\boldsymbol{k}} \rangle = 0, \ \forall\, \boldsymbol{k} \ \text{ s.t. } \ k_j \neq 0. \tag{2.3}$$

Cette observation entraîne que si la dimension intrinsèque $\mathrm{Card}(J)$ est petite comparée à la dimension ambiante, alors la suite de coefficients de Fourier est sparse. De plus, comme il est expliqué ci-dessous, il y a une sorte de sparsité de groupe avec des groupes qui se chevauchent. On va donc chercher a découvrir les variables pertinentes en testant la significativité des groupes de coefficients de Fourier.

Pour tout $\ell \in \{1, \ldots, d^*\}$, on note P_ℓ^d l'ensemble de tous les sous-ensembles I de $\{1, \ldots, d\}$ ayant exactement ℓ éléments :

$$P_\ell^d = \{I \subset \{1, \ldots, d\} \ : \ \mathrm{Card}(I) = \ell\}.$$

Pour tout multi-indice $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^d$, on note $\mathrm{supp}(\boldsymbol{k})$ l'ensemble des indices correspondant aux coordonnées non nulles de $\boldsymbol{k}$. Pour définir les groupes de coefficients $\theta_{\boldsymbol{k}}$ qui vont être testés, on introduit les notations suivantes : pour tout $I \subset \{1, \ldots, d\}$ et tout $j \in I$, on pose

$$V_I^j[\mathsf{f}] = \Big(\theta_{\boldsymbol{k}}[\mathsf{f}] : j \in \mathrm{supp}(\boldsymbol{k}) \subset I\Big).$$

D'après (2.3) on a la caractérisation

$$j \notin J \quad \Longleftrightarrow \quad \max_I \left\|V_I^j[\mathsf{f}]\right\|_p = 0, \tag{2.4}$$

pour tout $p \in [0, +\infty]$. De plus, à nouveau au vu de (2.3), le maximum sur I des normes $\left\|V_I^j[\mathsf{f}]\right\|_p$ est atteint quand $I = J$ et est égal au maximum sur tous les sous-ensembles I tels que $\mathrm{Card}(I) \leq d^*$. En résumant ces arguments, on peut formuler le problème de la sélection de variables comme un problème de test de d hypothèses nulles

$$H_{0j} : \quad \left\|V_I^j[\mathsf{f}]\right\|_p = 0 \quad \forall I \subset \{1, \ldots, d\} \text{ tel que } \mathrm{Card}(I) \leq d^*. \tag{2.5}$$

Si l'hypothèse H_{0j} est rejetée, alors la $j$ème variable est déclarée pertinente. On remarque que, en vertu de l'hypothèse [**C1**], les alternatives peuvent être réécrites comme suit

$$H_{1j} : \quad \left\|V_I^j[\mathsf{f}]\right\|_2^2 \geq \kappa \text{ pour un certain } I \subset \{1, \ldots, d\} \text{ tel que } \mathrm{Card}(I) \leq d^*. \tag{2.6}$$

Notre estimateur est basé sur cette caractérisation du support de sparsité. Si on note $y_{\boldsymbol{k}}$ la variable aléatoire observable $\boldsymbol{Y}(\varphi_{\boldsymbol{k}})$, on a

$$y_{\boldsymbol{k}} = \theta_{\boldsymbol{k}}[\mathsf{f}] + n^{-1/2}\, \xi_{\boldsymbol{k}}, \qquad \theta_{\boldsymbol{k}}[\mathsf{f}] = \langle f, \varphi_{\boldsymbol{k}} \rangle, \quad \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^d, \tag{2.7}$$

où les $\{\xi_{\boldsymbol{k}}; \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^d\}$ forment une famille dénombrable de variables indépendantes gaussiennes avec une moyenne nulle et une variance égale à un. D'après cette propriété, $y_{\boldsymbol{k}}$ est un bon estimateur de $\theta_{\boldsymbol{k}}[\mathsf{f}]$: il est sans biais et a une erreur quadratique moyenne égale à $1/n$. Ceci suggère d'estimer V_I^j par $\widehat{V}_I^j = (y_{\boldsymbol{k}} : j \in \mathrm{supp}(\boldsymbol{k}) \subset I)$ et la norme de V_I^j par la norme de $\widehat{V}_I^j$. Cependant, puisque ceci revient à estimer un vecteur infini-dimensionnel, l'erreur d'estimation va être infiniment grande. Pour résoudre ce problème, on restreint l'ensemble d'indices pour lequel $\theta_{\boldsymbol{k}}$ est estimé par $y_{\boldsymbol{k}}$ à un ensemble fini, en dehors duquel $\theta_{\boldsymbol{k}}$ va simplement être estimé par 0. Une telle restriction est justifiée par le fait que f est supposée lisse : les coefficients de Fourier correspondant aux très hautes fréquences sont très petits.

Fixons un entier $m > 0$, le niveau de coupure, et posons, pour $j \in I \subset \{1, \ldots, d\}$,

$$S_{m,I}^j = \Big\{ \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^d \ : \ \|\boldsymbol{k}\|_2 \leq m \ \text{ et } \ \{j\} \subset \mathrm{supp}(\boldsymbol{k}) \subset I \Big\}.$$

Puisque les alternatives H_{1j} concernent la norme 2, on fabrique une statistique de test à partir d'une estimation de la norme $\|V_I^j[\mathsf{f}]\|_2^2$. A cette fin, on introduit

$$\widehat{Q}_{m,I}^j = \sum\nolimits_{\boldsymbol{k} \in S_{m,I}^j} \Big(y_{\boldsymbol{k}}^2 - \frac{1}{n} \Big),$$

qui est un estimateur sans biais de $Q_{m,I}^j = \sum_{\boldsymbol{k} \in S_{m,I}^j} \theta_{\boldsymbol{k}}^2$. On remarque que quand $m \to \infty$, la quantité $Q_{m,I}^j$ approche $\|V_I^j[\mathsf{f}]\|_2^2$. Il est clair que de plus grandes valeurs de m mènent à un biais plus petit tandis que la variance augmente. De plus, la variance de $\widehat{Q}_{m,I}^j$ est proportionnelle au cardinal de l'ensemble $S_{m,I}^j$. Ce dernier est une fonction croissante de $\mathrm{Card}(I)$. En conséquence, si on cherche à obtenir des précisions d'estimation comparables quand on estime les fonctionnelles $\|V_I^j[\mathsf{f}]\|_2^2$ par $\widehat{Q}_{m,I}^j$ pour divers I, il est raisonnable de faire varier le niveau de coupure m avec le cardinal de I.

Ainsi, on considère la coupure multivariée $\boldsymbol{m} = (m_1, \ldots, m_{d^*}) \in \mathbb{N}^{d^*}$. Pour un sous-ensemble I de cardinal $\ell \leq d^*$, on teste l'importance du vecteur $V_I^j[\mathsf{f}]$ en comparant son estimation $\widehat{Q}_{m_\ell,I}^j$ avec un seuil prescrit λ_ℓ. Ceci nous mène à définir un estimateur de l'ensemble J par

$$\widehat{J}_n(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\lambda}) = \Big\{ j \in \{1, \ldots, d\} \ : \ \max_{\ell \leq d^*} \ \lambda_\ell^{-1} \max_{I \in P_\ell^d} \ \widehat{Q}_{m_\ell,I}^j \geq 1 \Big\}.$$

où $\boldsymbol{m} = (m_1, \ldots, m_{d^*}) \in \mathbb{N}^{d^*}$ et $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{d^*}) \in \mathbb{R}_+^{d^*}$ sont deux vecteurs de paramètres. Comme on l'a déjà mentionné, le rôle de $\boldsymbol{m}$ est d'assurer que les sommes tronquées $Q_{m,J}^j$ sont assez proches des sommes complètes Q_J^j. Quantitativement parlant, pour $\tau > 0$ donné, on aimerait choisir les m_ℓ de sorte que $Q_{m_s,J}^j \geq \kappa\tau/\tau + 1$, où $s = \mathrm{Card}(J)$. Ceci peut être assuré par l'hypothèse de régularité. En effet, comme il est prouvé dans (2.36) (cf. Appendice 2.9.3), on a

$$Q_{m_s,J}^j \geq \kappa - m_s^{-2} L s, \qquad \forall j \in J.$$

Donc, le choix de $m_\ell = \big(\ell L(1+\tau)/\kappa\big)^{1/2}$, pour tout $\ell = 1, \ldots, d^*$, entraîne l'inégalité $Q_{m_s,J}^j \geq \kappa\tau/\tau + 1$, qui indique que la pertinence des variables n'est pas trop affectée par la troncature.

En poussant un peu plus loin l'analogie avec les tests d'hypothèses, on définit l'erreur de première espèce d'un estimateur $\widehat{J}_n$ de J comme le fait d'avoir $\widehat{J}_n \not\subset J$, *i.e.*, le fait de classer certaines variables non pertinentes comme pertinentes. L'erreur de deuxième espèce correspond alors au fait d'avoir $J \not\subset \widehat{J}$, ce qui revient à classer certaines variables pertinentes parmi les non pertinentes. Comme dans le problème de test, le maniement de l'erreur de première espèce est plus facile puisque sous l'hypothèse nulle la distribution de la statistique de test est indépendante de f. En fait, elle correspond juste au maximum d'une famille finie de variables aléatoires suivant une distribution du χ^2 non centrée et changée d'échelle. L'utilisation de la méthode de Bonferroni mène au contrôle suivant de l'erreur de première espèce.

Proposition 2.1. *Notons $N(\ell, \gamma)$ le cardinal de l'ensemble $\{\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^\ell : \|\boldsymbol{k}\|_2^2 \leq \gamma\ell \ \& \ k_1 \neq 0\}$. Si pour un certain réel $A > 1$ et pour tout $\ell = 1, \ldots, d^*$,*

$$\lambda_\ell \geq \frac{2\sqrt{AN(\ell, m_\ell^2/\ell)d^* \log(2ed/d^*)} + 2Ad^* \log(2ed/d^*)}{n}, \tag{2.8}$$

alors l'erreur de première espèce, $\mathbf{P}(\widehat{J}_n(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\lambda}) \not\subset J)$, est majorée par $(2ed/d^*)^{-d^*(A-1)}$, et donc tend vers 0 quand $d/d^* \to +\infty$.

Cette proposition montre que l'erreur de première espèce d'une procédure de sélection de variables peut être rendue petite en choisissant un seuil suffisamment grand. En faisant ceci, on court le risque de rejeter l'hypothèse H_{0j} très souvent et de sous-estimer drastiquement l'ensemble des variables pertinentes. Le prochain résultat établit une condition nécessaire, dont on va montrer qu'elle est stricte, assurant qu'une telle sous-estimation ne se produit pas.

Théorème 2.2. *Supposons que la condition $[\mathbf{C1}(\kappa, L)]$ est satifaite avec certaines constantes connues $\kappa > 0$ et $L < \infty$ et soit $s = \mathrm{Card}(J)$. Pour certains réels $\tau > 0$ et $A > 1$, on pose $m_\ell = \left(\ell L(1+\tau)/\kappa\right)^{1/2}$, $\ell = 1, \ldots, d^*$, et on définit λ_ℓ comme le côté droit de (2.8). Si la condition*

$$4\lambda_s \leq \kappa\tau/(1+\tau) \tag{2.9}$$

est remplie, alors $\widehat{J}_n(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\lambda})$ est consistant et satisfait les inégalités

$$\mathbf{P}(\widehat{J}_n(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\lambda}) \not\supset J) \leq 2(2ed/d^*)^{-d^*(A-1)}$$

et

$$\mathbf{P}(\widehat{J}_n(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\lambda}) \neq J) \leq 3(2ed/d^*)^{-d^*(A-1)}.$$

La condition (2.9) assurant la consistance de la procédure de sélection de variables $\widehat{J}_n$ admet une interprétation naturelle : il est possible de détecter les variables pertinentes si le degré de pertinence κ est plus grand qu'un multiple du seuil λ_s, ce dernier étant choisi selon le niveau de bruit.

Une première observation est que ce théorème fournit une condition simple pour retrouver le support de sparsité de façon consistante dans le cas où la dimension intrinsèque est fixe. En fait quand d^* reste borné alors que $n \to \infty$ et $d \to \infty$, on obtient $\mathbf{P}(\widehat{J}_n(m,\lambda) = J) \to_{n,d\to\infty} 1$ pourvu que

$$\log d \leq \text{Const} \cdot n. \tag{2.10}$$

Bien que l'on ait pas trouvé (exactement) ce résultat dans la littérature statistique sur la sélection de variables, on peut vérifier que (2.10) est une condition nécessaire et suffisante pour retrouver le support de sparsité J en régression linéaire avec une sparsité fixée d^*, une dimension croissante d et une taille d'échantillon n. Ainsi, dans le régime où d^* est fixé ou borné, l'estimation du support de sparsité en régression nonparamétrique n'est pas plus difficile que la régression linéaire paramétrique, tant que seulement la consistance de l'estimation est considérée et que la valeur précise de la constante dans (2.10) est négligée. De plus, il existe un estimateur simple $\widehat{J}_n^{(1)}$ de J , défini de facon precise dans la sous-section suivante, qui est consistant sous la condition (2.10). Cet estimateur peut être vu comme une procédure de test d'hypothèses H_{0j} de la forme (2.5) avec $p = \infty$ et, donc, il n'exploite pas vraiment la structure des coefficients de Fourier de la fonction de régression. Dans une certaine mesure, ceci est la raison pour laquelle dans le régime où la dimension intrinsèque $d^* \to \infty$ tend vers l'infini, l'estimateur $\widehat{J}_n^{(1)}$ proposé dans la Proposition 2.5 n'est plus optimal. On donne cependant la construction et la performance de cet estimateur dans la sous-section suivante, parce qu'il sera utilisé pour construire un estimateur dans le cadre de la régression.

En fait, quand $s \to \infty$, le terme $N(s, m_s^2/s)$ présent dans (2.9) et (2.8) tend vers l'infini aussi. De plus, comme on montre dans la Section 2.3, cette convergence a lieu à un taux exponentiel en s. Donc, dans ce cadre asymptotique, il est crucial de connaître l'ordre de $N(s, m_s^2/s)$. C'est ce qu'on étudie dans la Section 2.4.

Remarque 2.3. Un inconvénient de l'estimateur $\widehat{J}_n$ est la présence d'un grand nombre de paramètres de règlage apparaissant dans $\widehat{J}_n$. Cependant, le Théorème 2.2 révèle que pour atteindre une bonne puissance de sélection, il suffit de sélectionner le paramètre de règlage de dimension $2d^*$, $(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\lambda})$, sur une courbe de dimension un paramétrée par $\vartheta = L(1+\tau)/\kappa$. En effet, une fois que la valeur de ϑ est donnée, le Théorème 2.2 conseille de choisir

$$m_\ell = (\ell\vartheta)^{1/2} \quad \text{and} \quad \lambda_\ell = \frac{2\sqrt{AN(\ell,\vartheta)d^* \log(2ed/d^*)} + 2Ad^* \log(2ed/d^*)}{n} \tag{2.11}$$

pour tout $\ell = 1, \ldots, d^*$. Comme il est expliqué dans la discussion de la Section 2.5.1, cette propriété permet de construire une procédure adaptative, qui ne necessite pas la connaissance a priori des valeurs L et κ apparaissant dans [**C1**].

Remarque 2.4. Le résultat du dernier théorème est dans un certain sens adaptatif par rapport à la sparsité. En effet, tandis que l'estimateur $\widehat{J}_n$ utilise d^*, qui est simplement une borne supérieure pour la vraie sparsité $s = \text{Card}(J)$ et peut être significativement plus

grande que s, c'est la vraie sparsité s qui apparaît dans la condition (2.9) comme premier argument dans la quantité $N(\cdot, \vartheta)$. Ce point est important étant donné le taux exponentiel de divergence de $N(\cdot, \vartheta)$ quand son premier argument tend vers l'infini. D'un autre côté, si la condition (2.9) est satisfaite avec $N(d^*, \vartheta)$ au lieu de $N(\mathrm{Card}(J), \vartheta)$, alors l'estimation consistante de J peut être effectuée par une procédure légèrement plus simple :

$$\widetilde{J}_n(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\lambda}) = \Big\{ j \in \{1, \dots, d\} \ : \ \max_{I \in P^d_{d^*}} \widehat{Q}^j_{m_{d^*}, I} \geq \lambda_{d^*} \Big\}.$$

La preuve de cette affirmation est similaire à celle du Théorème 2.2.

2.2.2 Estimation de J par le seuillage des coefficients de Fourier

Une approche plus simple pour sélectionner les variables consiste à calculer les coefficients de Fourier du signal observé et à les comparer à un seuil convenablement choisi. Comme on l'a expliqué ci-dessus, on a

$$j \notin J \quad \Longleftrightarrow \quad \theta_{\boldsymbol{k}}[\mathrm{f}] = \langle f, \varphi_{\boldsymbol{k}} \rangle = 0, \ \forall \, \boldsymbol{k} \ \text{ s.t. } \ k_j \neq 0. \tag{2.12}$$

Donc on a

$$J = \Big\{ j \in \{1, \dots, d\} : \ \exists \boldsymbol{k} \ \text{ s.t. } \ k_j \neq 0 \ \text{ and } \ \theta_{\boldsymbol{k}}[\mathrm{f}] \neq 0 \Big\}. \tag{2.13}$$

D'après la section précédente, il semble naturel d'estimer l'ensemble J par l'ensemble

$$\tilde{J}_\lambda = \Big\{ j \in \{1, \dots, d\} : \sup_{\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^d : k_j \neq 0} |y_{\boldsymbol{k}}| > \lambda \Big\}, \tag{2.14}$$

pour un certain paramètre positif λ. Cependant, comme précédemment, cet estimateur est impossible à calculer puisque pour tout j un nombre infini de comparaisons devraient être réalisées. De plus, cet estimateur $\tilde{J}_\lambda$ n'est pas consistant puisque pour tout λ et pour tout $j \notin J$, on peut trouver (avec une probabilité égale à un) une variable aléatoire parmi la suite infinie $\{\xi_{\boldsymbol{k}} : k_j \neq 0\}$ qui dépasse le seuil λ en valeur absolue. Ainsi, la probabilité d'avoir $\tilde{J}_\lambda = \{1, \dots, d\}$ est égale à un.

On restreint donc l'ensemble des indices pour lesquels on effectue la comparaison avec le seuil comme précédemment.

En utilisant les ensembles S^j_{m,d^*}, on définit l'estimateur de J par la formule

$$\widehat{J}_{1,n}(m, \lambda) = \Big\{ j \in \{1, \dots, d\} : \max_{\boldsymbol{k} \in S^j_{m,d^*}} |y_{\boldsymbol{k}}| > \lambda \Big\}. \tag{2.15}$$

Comme précédemment, le paramètre m permet d'adapter l'estimateur à la régularité de la fonction de régression sous-jacente, tandis que λ est le seuil utilisé pour discriminer les coefficients significatifs du bruit. Ainsi, il n'est pas surprenant que dans le théorème suivant, m soit une fonction décroissante de L et que λ soit proportionnel au niveau de bruit $n^{-1/2}$. On rappelle la notation précédente pour $N(s, \gamma)$:

$$N(s, \gamma) = \mathrm{Card}\{\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^s : \|\boldsymbol{k}\|_2^2 \leq \gamma s \,\&\, k_1 \neq 0\};$$

Proposition 2.5. *Supposons que la condition* $[\mathbf{C1}(\kappa, L)]$ *est satisfaite avec certaines constantes connues* $\kappa > 0$ *et* $L < \infty$. *Pour un nombre réel* $A > 1$, *posons*

$$m = (2Ld^*/\kappa)^{1/2} \qquad et \qquad \lambda = \Big(\frac{2Ad^* \log(6md)}{n}\Big)^{1/2}.$$

Si

$$\frac{d^* N(s, 2L/\kappa)\ \log(6md)}{n} < \frac{\kappa}{16A} \tag{2.16}$$

alors $\widehat{J}_1(m, \lambda)$ *est un estimateur consistant de* J *et la probabilité de l'événement* $\widehat{J}_1(m, \lambda) \neq J$ *est majorée par* $3d^{-d^*(A-1)}$.

Dans le cadre d'une dimension intrinsèque fixe, cet estimateur est consistant sous la même condition (2.10) que l'estimateur prédédent (à une constante multiplicative près).

2.3 Nombre de points à coordonnées entières dans une boule

Le but de cette section est de trouver les propriétés de la quantité $N(d^*, \gamma)$ qui apparaît dans les conditions assurant la consistance des procédures proposées. Le comportement asymptotique de $N(d^*, \gamma)$ s'avère être relié à la fonction θ de Jacobi. Pour montrer ceci, introduisons des notations. Pour un nombre strictement positif γ, on pose

$$\mathcal{C}_1(d^*, \gamma) = \Big\{\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^{d^*} : k_1^2 + ... + k_{d^*}^2 \leq \gamma d^*\Big\}, \quad \mathcal{C}_2(d^*, \gamma) = \Big\{\boldsymbol{k} \in \mathcal{C}_1(d^*, \gamma) : k_1 = 0\Big\}$$

et on pose

$$N_1(d^*, \gamma) = \mathrm{Card}(\mathcal{C}_1(d^*, \gamma)) \quad \text{et} \quad N_2(d^*, \gamma) = \mathrm{Card}(\mathcal{C}_2(d^*, \gamma)).$$

Plus simplement, $N_1(d^*, \gamma)$ est le nombre de points à coordonnées entières se trouvant dans la boule d^*-dimensionnelle de rayon $(\gamma d^*)^{1/2}$ et centrée à l'origine, tandis que $N_2(d^*, \gamma)$ est le nombre de points à coordonnées entières se trouvant dans la boule (d^*-1)-dimensionnelle de rayon $(\gamma d^*)^{1/2}$ et centrée à l'origine. Avec cette notation, la quantité $N(\ell, \cdot)$ du Théorème 2.2 peut être réécrite

$$N(\ell, \cdot) = N_1(\ell, \cdot) - N_2(\ell, \cdot).$$

Par des arguments volumétriques, on peut vérifier que $V(d^*)(\sqrt{\gamma}-1)^{d^*}(d^*)^{d^*/2} \leq N_1(d^*, \gamma) \leq V(d^*)(\sqrt{\gamma}+1)^{d^*}(d^*)^{d^*/2}$, où $V(d^*) = \pi^{d^*/2}/\Gamma(1 + d^*/2)$ est le volume de la boule unité dans $\mathbb{R}^{d^*}$. De plus, on a des bornes similaires pour $N_2(d^*, \gamma)$. Malheureusement, quand $d^* \to \infty$, ces inégalités ne sont pas assez précises pour donner des résultats non triviaux dans le problème de sélection de variables que l'on traite. Ceci est spécialement vrai pour les résultats sur l'impossibilité de l'estimation consistante de la Section 2.4.

De façon à déterminer le comportement asymptotique de $N_1(d^*, \gamma)$ et $N_2(d^*, \gamma)$ quand d^* tend vers l'infini, on va utiliser leur représentation asymptotique à travers la fonction θ de Jacobi. On rappelle que ce dernier est donné par

$$\mathsf{h}(z) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} z^{r^2},$$

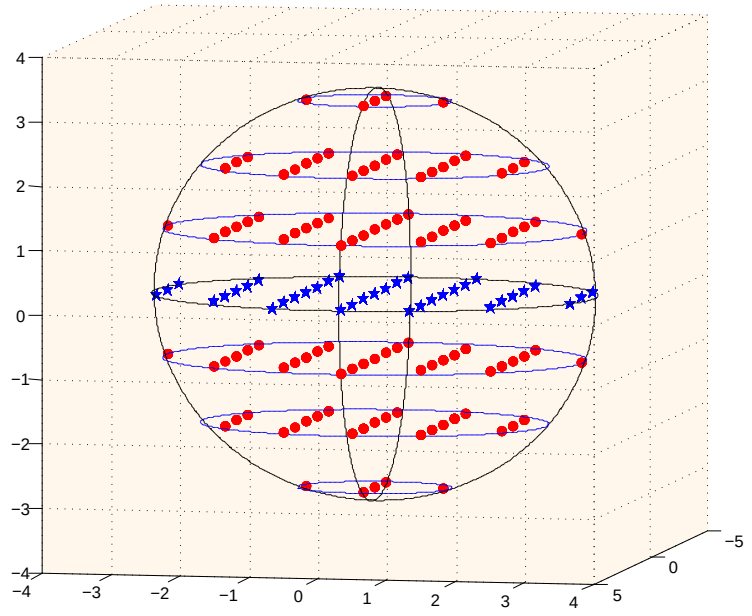


FIGURE 2.1 – Points à coordonnées entières dans une boule de rayon $R = \gamma d^* = 3.2$ dans l'espace de dimension 3 ($d^* = 3$). Les points rouges sont ceux de $\mathcal{C}_1(d^*, \gamma) \setminus \mathcal{C}_2(d^*, \gamma)$ tandis que les étoiles bleues sont celles de $\mathcal{C}_2(d^*, \gamma)$. Dans cet exemple , $N(d^*, \gamma) = N(3, 1.07) = 110$.

qui est bien défini pour tout nombre complexe z appartenant à la boule unité $|z| < 1$. Pour expliquer brièvement d'où vient la relation entre $N_i(d^*, \gamma)$ et la fonction θ, notons $\{a_r\}$ la suite de coefficients de la série $\mathsf{h}(z)^{d^*}$, c'est-à-dire

$$\mathsf{h}(z)^{d^*} = \sum_{r \geq 0} a_r z^r.$$

On vérifie aisément que $\forall r \in \mathbb{N}$, $a_r = \text{Card}\{\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^{d^*} : k_1^2 + ... + k_{d^*}^2 = r\}$. Ainsi, pour tout γ tel que γd^* est entier, on a

$$N_1(d^*, \gamma) = \sum_{r=0}^{\gamma d^*} a_r.$$

Par le théorème de Cauchy, on obtient :

$$N_1(d^*, \gamma) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\mathsf{h}(z)^{d^*}}{z^{\gamma d^*}} \frac{dz}{z(1-z)}.$$

où l'intégrale est prise sur tout cercle $|z| = w$ avec $0 < w < 1$. En exploitant cette représentation et en appliquant la méthode du point-selle décrite en détail dans [25], on obtient le résultat suivant.

Proposition 2.6. *Let $\gamma > 0$ un entier et soit $\mathsf{l}_\gamma(z) = \log \mathsf{h}(z) - \gamma \log z$.*

1. *Il existe une solution unique z_γ dans $(0, 1)$ de l'équation $\mathsf{l}'_\gamma(z) = 0$. De plus, la fonction $\gamma \mapsto z_\gamma$ est croissante et $\mathsf{l}''_\gamma(z) > 0$.*

2. *Pour $i = 1, 2$, on a les équivalences suivantes :*

$$N_i(d^*, \gamma) = \left(\frac{\mathsf{h}(z_\gamma)}{z_\gamma^\gamma}\right)^{d^*} \frac{1 + o(1)}{\mathsf{h}(z_\gamma)^{i-1} z_\gamma (1 - z_\gamma)(2\mathsf{l}''_\gamma(z_\gamma)\pi d^*)^{1/2}},$$

quand d^* tend vers l'infini.

Dans la suite, il va être utile de remarquer que la seconde partie de la Proposition 2.6 donne

$$\log\left(N_1(d^*, \gamma) - N_2(d^*, \gamma)\right) = d^* \mathsf{l}_\gamma(z_\gamma) - \frac{1}{2}\log d^* + c_\gamma + o(1), \quad \text{quand } d^* \to \infty, \tag{2.17}$$

avec

$$c_\gamma = \log\left(\frac{\mathsf{h}(z_\gamma) - 1}{\mathsf{h}(z_\gamma) z_\gamma (1 - z_\gamma)\sqrt{2\pi \mathsf{l}''_\gamma(z_\gamma)}}\right).$$

De plus, alors que les équivalences asymptotiques de la Proposition 2.6 sont établies pour des valeurs entières de $\gamma > 0$, la relation $\log\left(N_1(d^*, \gamma) - N_2(d^*, \gamma)\right) = d^* \mathsf{l}_\gamma(z_\gamma)(1 + o(1))$ est vérifiée pour tout nombre positif γ [68]. Pour avoir une idée de la façon dont les termes z_γ et $\mathsf{l}_\gamma(z_\gamma)$ dependent de γ, on a tracé dans la Fig. 2.2 les graphes de ces quantités comme fonctions de $\gamma > 0$.

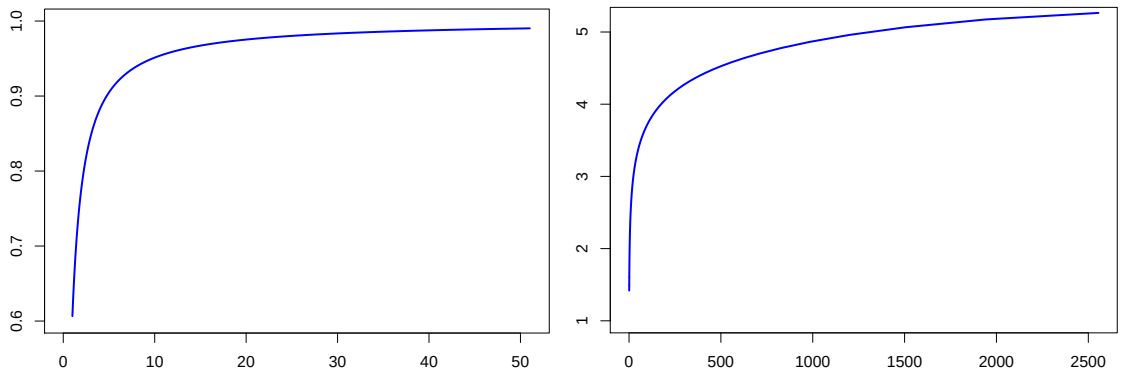


FIGURE 2.2 – Les graphes des fonctions $\gamma \mapsto z_\gamma$ et $\gamma \mapsto \mathsf{l}_\gamma(z_\gamma)$. On peut observer que les deux fonctions sont croissantes, la première fonction converge vers 1 très rapidement ,tandis que la seconde semble diverger très lentement.

En combinant la relation (2.17) avec le Théorème 2.2, on obtient le résultat suivant.

Corollaire 2.7. *On suppose la condition* $[\mathbf{C1}(\kappa, L)]$ *satisfaite avec certaines constantes connues $\kappa > 0$ et $L < \infty$. On considère le cadre asymptotique dans lequel à la fois $d = d_n$ et $d^* = d_n^*$ tendent vers l'infini quand $n \to \infty$. On suppose que d augmente à un taux sous-exponentiel en n, c'est-à-dire* $\log\log d = o(\log n)$. *Si*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{d^*}{\log n} < \frac{2}{\mathsf{l}_\gamma(z_\gamma)}$$

avec $\gamma = L/\kappa$, alors l'estimation consistante de J est possible et peut être effectuée, par exemple, par l'estimateur $\widehat{J}_n$.

2.4 Optimalité des hypothèses

Dans cette section, on considère la classe fonctionnelle $\Sigma(\kappa, L)$ de toutes les fonctions satisfaisant l'hypothèse **[C1**(κ, L)**]**. Pour souligner que J est le support de sparsité de la fonction f, on écrit J_{f} au lieu de J. On suppose que $s = \mathrm{Card}(J) = d^*$. Le but est de fournir des conditions sous lesquelles l'estimation consistante du support de sparsité est impossible, c'est-à-dire qu'il existe une constante $c > 0$ et un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que, si $n \geq n_0$,

$$\inf_{\widetilde{J}} \sup_{\mathsf{f} \in \Sigma(\kappa, L)} \mathbf{P}_{\mathsf{f}}(\widetilde{J} \neq J_{\mathsf{f}}) \geq c,$$

où l'inf est pris sur tous les estimateurs possibles de J_{f}. A cette fin, on introduit un ensemble de $M+1$ distributions de probabilité $\mu_0, \ldots, \mu_M$ sur $\Sigma(\kappa, L)$ et on utilise le fait que

$$\inf_{\widetilde{J}} \sup_{\mathsf{f} \in \widetilde{\Sigma}(\kappa, L)} \mathbf{P}_{\mathsf{f}}(\widetilde{J} \neq J_{\mathsf{f}}) \geq \inf_{\widetilde{J}} \frac{1}{M+1} \sum_{\ell=0}^{M} \int_{\Sigma(\kappa, L)} \mathbf{P}_{\mathsf{f}}(\widetilde{J} \neq J_{\mathsf{f}})\, \mu_\ell(d\mathsf{f}). \tag{2.18}$$

Ces mesures μ_ℓ vont être choisies de telle sorte que pour chaque $\ell \geq 1$ il existe un ensemble J_ℓ de cardinal d^* tel que $\mu_\ell\{J_{\mathsf{f}} = J_\ell\} = 1$ et tous les ensembles $J_1, \ldots, J_M$ sont distincts. La mesure μ_0 est la mesure de Dirac en 0. En considérant ces μ_ℓ comme des lois a priori sur $\Sigma(\kappa, L)$ et en définissant les lois a posteriori correspondantes $\mathbb{P}_0, \mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_M$ par

$$\mathbb{P}_\ell(A) = \int_{\Sigma(\kappa, L)} \mathbf{P}_{\mathsf{f}}(A)\, \mu_\ell(d\mathsf{f}), \quad \text{pour tout ensemble mesurable } A \subset \mathbb{R}^n,$$

on peut écrire l'inégalité (2.18) comme

$$\inf_{\widetilde{J}} \sup_{\mathsf{f} \in \Sigma(\kappa, L)} \mathbf{P}_{\mathsf{f}}(\widetilde{J} \neq J_{\mathsf{f}}) \geq \inf_{\psi} \frac{1}{M+1} \sum_{\ell=0}^{M} \mathbb{P}_\ell(\psi \neq \ell), \tag{2.19}$$

où l'inf est pris sur toutes les variables aléatoires ψ à valeurs dans $\{0, \ldots, M\}$. Ce dernier inf va être contrôlé en utilisant une version appropriée du lemme de Fano. On note $\mathcal{K}(P, Q)$ la divergence de Kullback-Leibler entre deux mesures de probabilité P et Q definies sur le même espace de probabilité.

Lemme 2.8 (Corollaire 2.6 de [83])**.** *Soit $M \geq 3$ un entier, $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ un espace mesurable et soit $P_0, \ldots, P_M$ des mesures de probabilité sur $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$. Posons $\bar{p}_{e,M} = \inf_\psi (M+1)^{-1} \sum_{\ell=0}^{M} P_\ell(\psi \neq \ell)$, où l'*inf *est pris sur toutes les fonctions mesurables $\psi : \mathcal{X} \to \{0, \ldots, M\}$. Si pour un certain $0 < \alpha < 1$,*

$$\frac{1}{M+1} \sum_{\ell=1}^{M} \mathcal{K}(P_\ell, P_0) \leq \alpha \log M,$$

alors

$$\bar{p}_{e,M} \geq \frac{1}{2} - \alpha.$$

On applique ce lemme avec $\mathcal{X}$ l'ensemble de tous les tableaux $\boldsymbol{y} = \{y_{\boldsymbol{k}} : \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^d\}$ tels que pour un certain $K > 0$, les éléments $y_{\boldsymbol{k}}$ sont nuls pour tout $\boldsymbol{k}$ plus grand que K en norme ℓ_2. Il vient du lemme de Fano que l'on peut déduire une borne inférieure sur $\bar{p}_{e,M}$, la quantité qui nous intéresse, à partir d'une borne supérieure sur la divergence de Kullback-Leibler entre $\mathbb{P}_\ell$ et $\mathbb{P}_0$. A partir de là on est en position d'énoncer le principal résultat sur l'impossibilité d'une estimation consistante du support de sparsité dans le cas où les conditions du Théorème 2.2 ne sont pas vérifiées.

Théorème 2.9. *On suppose que $\vartheta = L/\kappa > 1$ et $\binom{d}{d^*} \geq 3$. Soit γ_ϑ le plus grand entier satisfaisant*

$$\gamma(1 + (\mathsf{h}(z_\gamma) - 1)^{-1}) \leq \vartheta,$$

où la fonction θ de Jacobi h et z_γ sont ceux définis dans la Section 2.3.

i) *Si pour un certain $\alpha \in (0, 1/2)$,*

$$\frac{N(d^*, \gamma_\vartheta) d^* \log(d/d^*)}{n^2} \geq \frac{\vartheta}{\alpha \gamma_\vartheta} \kappa^2, \tag{2.20}$$

alors, pour d^* assez grand, $\inf_{\widetilde{J}} \sup_{\mathsf{f} \in \Sigma} \mathbf{P}_\mathsf{f}(\widetilde{J} \neq J_\mathsf{f}) \geq \frac{1}{2} - \alpha$.

ii) *Si pour un certain $\alpha \in (0, 1/2)$,*

$$\frac{d^* \log(d/d^*)}{n} \geq \frac{\kappa}{\alpha}, \tag{2.21}$$

alors $\inf_{\widetilde{J}} \sup_{\mathsf{f} \in \Sigma} \mathbf{P}_\mathsf{f}(\widetilde{J} \neq J_\mathsf{f}) \geq \frac{1}{2} - \alpha$.

Remarquons que la condition (2.20) est le contraire de la condition (2.9) du Théorème 2.2 dans le cas où $d^* \to \infty$, dans le sens que la condition (2.9) revient à exiger que le côté gauche de (2.20) est plus petit qu'une certaine constante. Il y a cependant une différence entre les quantités apparaissant dans ces conditions : le terme $N(d^*, \vartheta(1+\tau))$ de (2.9) est remplacé par $N(d^*, \gamma_\vartheta)$ dans la condition (2.20). On peut se demander si γ_ϑ est proche de ϑ. Pour donner une réponse qualitative à cette question, on a tracé sur la Figure 2.3 la courbe de la fonction $\vartheta \mapsto \gamma_\vartheta$ et celle de la bissectrice $\vartheta \mapsto \vartheta$. On observe que la différence entre deux courbes est petite comparée à ϑ. Comme on l'explique plus tard, cette propriété montre que les constantes apparaissant dans la condition nécessaire et la condition suffisante pour l'estimation consistante de J sont très proches, spécialement pour de grandes valeurs de ϑ.

2.5 Adaptativité et taux minimax de séparation

2.5.1 Adaptation par rapport à L et κ

L'estimateur $\widehat{J}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\lambda})$ que l'on a introduit dans la Section 2.2 est clairement nonadaptatif : les paramètres $(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\lambda})$ recommandés par la théorie développée font apparaître les

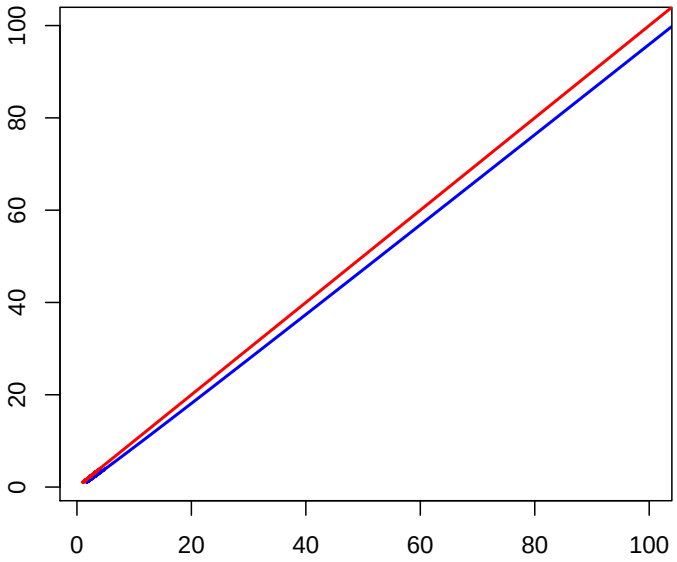


FIGURE 2.3 – La courbe de la fonction $L \mapsto \gamma_L$ (bleu) et la bissectrice (rouge).

valeurs L et κ, qui sont en général inconnues. Heureusement, on peut tirer avantage du fait que le choix de $\boldsymbol{m}$ et $\boldsymbol{\lambda}$ est gouverné par le paramètre unidimensionnel $\vartheta = L(1+\tau)/\kappa$. Donc, il est réaliste de supposer qu'une grille finie de valeurs $1 < \vartheta_1 \leq \ldots \leq \vartheta_K < \infty$ est disponible et telle que $\vartheta \leq \vartheta_k$ pour un certain k, c'est-a-dire la vraie valeur de theta appartient à la grille. Le résultat suivant fournit une procédure adaptative de sélection de variables garantissant un contrôle de l'erreur.

Proposition 2.10. *Soit* $1 < \vartheta_1 \leq \ldots \leq \vartheta_K < \infty$ *et* $\tau > 0$ *des valeurs données et posons*[1]

$$i^* = \min\left\{i : (1+\tau)\frac{\max_{j=1,\ldots,d}\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d} k_j^2\theta_{\boldsymbol{k}}^2}{\min_{j\in J}\sum_{\boldsymbol{k}:k_j\neq 0}\theta_{\boldsymbol{k}}^2} \leq \vartheta_i\right\} \leq K.$$

Pour tout $i, \ell \in \mathbb{N}$, *notons* $\widehat{J}_n(i) = \widehat{J}_n(\boldsymbol{m}(\vartheta_i), \boldsymbol{\lambda}(\vartheta_i))$ *avec* $m_\ell(\vartheta) = (\vartheta\ell)^{1/2}$ *et*

$$\lambda_\ell(\vartheta) = \frac{2\sqrt{2N(\ell,\vartheta)d^*\log(2ed/d^*)} + 4d^*\log(2ed/d^*)}{n}.$$

Si la condition suivante est remplie

$$4\lambda_s(\vartheta_{i^*}) < \kappa\tau/(1+\tau),$$

alors l'estimateur $\widehat{J}_n^{\mathrm{ad}} = \bigcup_{i=1}^K \widehat{J}_n(i)$ *satisfait* $\mathbf{P}(\widehat{J}_n^{\mathrm{ad}} \neq J) \leq (K+2)(d^*/2ed)^{d^*}$.

Plus simplement, si la grille de valeurs possibles $\{\vartheta_i\}$ a un cardinal K qui n'est pas trop grand (c'est-à-dire $K(d^*/d)^{d^*} \to 0$), alors une stratégie de sélection de variables consistante et adaptative consiste à déclarer une variable pertinente si au moins une des procédures

1. On utilise la convention que le minimum sur un ensemble vide est égal à $+\infty$.

$\widehat{J}_n(i)$ suggère sa pertinence. La preuve de cette affirmation vient immédiatement de la Proposition 2.1 et du Théorème 2.2. En effet, en appliquant la Proposition 2.1 avec $A = 2$ on obtient

$$\mathbf{P}(\widehat{J}_n^{\mathrm{ad}} \not\subset J) \leq \sum_{i=1}^{K} \mathbf{P}(\widehat{J}_n(i) \not\subset J) \leq K(d^*/2ed)^{d^*},$$

tandis que le Théorème 2.2 assure que

$$\mathbf{P}(\widehat{J}_n^{\mathrm{ad}} \not\supset J) \leq \mathbf{P}(\widehat{J}_n(i^*) \not\supset J) \leq 2(d^*/2ed)^{d^*}.$$

2.5.2 Taux minimax de séparation

Puisque la méthodologie de la Section 2.2 prend ses racines dans la théorie des tests d'hypothèses, on se demande naturellement quels sont les taux minimax de séparation dans le problème de la sélection de variables. Les résultats énoncés dans les sections précédentes nous permettent de répondre à cette question dans le cas d'une régularité de Sobolev d'ordre 1 et pour des alternatives séparées en norme L^2. Le résultat suivant fournit les taux minimax. On suppose ici que la vraie sparsité $s = \mathrm{Card}(J)$ et son majorant connu d^* sont tels que d^*/s est majoré par une certaine constante.

Proposition 2.11. *Il existe une constante D^* dépendant seulement de L telle que si*

$$\kappa \geq D^* \left\{ \left(\frac{\log(d/s)}{n^2} \right)^{2/(4+s)} \bigvee \frac{s \log(d/s)}{n} \right\},$$

alors il existe un estimateur consistant de J. De plus, la consistance est uniforme en $\mathsf{f} \in \Sigma(\kappa, L)$. D'autre part, il existe une constante D_* dépendant seulement de L telle que si

$$\kappa \leq D_* \left\{ \left(\frac{\log(d/s)}{n^2} \right)^{2/(4+s)} \bigvee \frac{s \log(d/s)}{n} \right\},$$

alors l'estimation consistante de J est impossible.

En empruntant la terminologie de la théorie des tests d'hypothèses, on dit que $(\frac{\log(d/s)}{n^2})^{2/(4+s)} \vee \frac{s \log(d/s)}{n}$ est le taux minimax de séparation dans le problème de sélection de variables pour une régularité de Sobolev d'ordre 1. Ces résultats s'étendent immédiatement à une régularité de Sobolev de tout ordre $\beta \geq 1$, dans ce cas le taux de séparation prend la forme

$$(\frac{\log(d/s)}{n^2})^{2\beta/(4\beta+s)} \vee \frac{s \log(d/s)}{n}.$$

Le premier terme dans ce maximum coincide, à un facteur logarithmique près, au taux minimax de séparation dans le problème de détection d'un signal en dimension s [53]. Remarquons, cependant, que dans notre cas cette inflation logarithmique est inévitable. C'est le prix à payer pour ne pas savoir à l'avance quelles sont les s variables pertinentes.

2.6 Régression nonparamétrique avec un design aléatoire

Jusqu'à présent, on a analysé la situation dans laquelle des observations bruitées de la fonction de régression $\mathsf{f}(\cdot)$ sont disponibles en tout point $\boldsymbol{x} \in [0,1]^d$. Tournons nous maintenant vers le modèle plus réaliste de la régression nonparamétrique, quand les valeurs bruitées observées de f sont échantillonnées aléatoirement dans l'hypercube unité $[0,1]^d$. Plus précisément, on suppose que n paires indépendantes et identiquement distribuées de variables d'entrée-sortie $(\boldsymbol{X}_i, Y_i)$, $i = 1, \dots, n$ sont observées et obéissent au modèle de régression

$$Y_i = \mathsf{f}(\boldsymbol{X}_i) + \sigma\varepsilon_i, \qquad i = 1, \dots, n.$$

On suppose que les variables d'entrée $\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_n$ prennent leurs valeurs dans $\mathbb{R}^d$ tandis que les variables de sortie $Y_1, \dots, Y_n$ sont scalaires. Comme d'habitude, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ sont tels que $\mathbf{E}[\varepsilon_i | \boldsymbol{X}_i] = 0$, $i = 1, \dots, n$; des conditions additionnelles vont être imposées plus tard. Sans exiger que f ait une forme paramétrique spéciale, on cherche à retrouver l'ensemble $J \subset \{1, \dots, d\}$ de ses variables pertinentes. Le niveau du bruit σ est supposé connu.

Il est clair que l'estimation de J ne peut pas être accomplie sans imposer à f et à la distribution P_X des variables d'entrée des hypothèses supplémentaires. On va supposer que f est différentiable avec un gradient de carré intégrable et que P_X admet une densité qui est minorée. Plus précisément, soit g la densité de P_X par rapport à la mesure de Lebesgue.

[C2] $\mathsf{g}(\boldsymbol{x}) = 0$ pour tout $\boldsymbol{x} \notin [0,1]^d$ et $\mathsf{g}(\boldsymbol{x}) \geq g_{\min}$ pour tout $\boldsymbol{x} \in [0,1]^d$.

Les prochaines hypothèses imposées à la fonction de régression et au bruit exigent leur bornitude dans un sens approprié. Ces hypothèses sont utilisées pour prouver, au moyen d'une inégalité de concentration, que les coefficients empiriques sont proches des vrais coefficients.

[C3(L_∞, L_2)**]** Les normes $L^\infty([0,1]^d, \mathbb{R}, P_X)$ et $L^2([0,1]^d, \mathbb{R}, P_X)$ de la fonction f sont majorées respectivement par L_∞ et L_2, *i.e.*, $\mathbf{P}\big(|\mathsf{f}(\boldsymbol{X})| \leq L_\infty\big) = 1$ et $\mathbf{E}[\mathsf{f}(\boldsymbol{X})^2] \leq L_2^2$.

[C4] Les variables de bruit satisfont presque sûrement $\mathbf{E}[e^{t\varepsilon_i} | \boldsymbol{X}_i] \leq e^{t^2/2}$ pour tout $t > 0$.

On souligne à nouveau que le but principal de ce travail est simplement de comprendre quand il est possible d'estimer de façon consistante le support de sparsité. L'estimateur que l'on va définir est utilisé pour démontrer la possibilité d'une estimation consistante, plutôt que dans l'optique de fournir une procédure pratique pour retrouver le support. Ainsi, on va permettre à l'estimateur de dépendre des paramètres $g_{\min}$, L, κ et L_2 apparaissant dans les conditions **[C1-C3]**.

2.6.1 Un estimateur de J et sa consistance

L'estimateur du support de sparsité J que l'on va introduire maintenant est basé sur l'estimateur $\widehat{J}_1(m, \lambda)$ de la Section 2.2.

On commence par estimer les coefficients de Fourier $\theta_{\boldsymbol{k}}[\mathsf{f}]$ par leurs versions empiriques :

$$\widehat{\theta}_{\boldsymbol{k}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{X}_i)}{\mathsf{g}(\boldsymbol{X}_i)} Y_i, \qquad \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^d.$$

On rappelle les notations suivantes $S^j_{m,\ell} = \{\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^d : \ \|\boldsymbol{k}\|_2 \le m, \ \|\boldsymbol{k}\|_0 \le \ell, k_j \neq 0\}$. L'estimateur de J est défini par

$$\widehat{J}^{(1)}_n(m,\lambda) = \Big\{ j \in \{1,\dots,d\} : \ \max\nolimits_{\boldsymbol{k} \in S^j_{m,d^*}} |\widehat{\theta}_{\boldsymbol{k}}| > \lambda \Big\}, \tag{2.22}$$

où m et λ sont des paramètres à définir plus tard. Le prochain résultat fournit des garanties de consistance pour $\widehat{J}^{(1)}_n(m,\lambda)$.

Théorème 2.12. *Supposons les conditions* **[C1-C4]** *remplies avec certaines valeurs connues* $g_{\min}$, $\vartheta = 2L/\kappa$ *et* L_2. *On suppose de plus que la densité du design* g *et qu'un majorant du niveau de bruit* σ *sont disponibles. Posons*

$$m = (\vartheta d^*)^{1/2} \quad \textit{et} \quad \lambda = 4(\sigma + L_2)(d^* \log(24\sqrt{\vartheta} d/d^*)/n g_{\min}^2)^{1/2}.$$

Si les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\frac{d^* \log(24\sqrt{\vartheta} d/d^*)}{n} \le \frac{L_2^2}{L_\infty^2}, \quad \frac{128(\sigma + L_2)^2 d^* N(d^*, \vartheta) \log(24\sqrt{\vartheta} d/d^*)}{n g_{\min}^2} < \kappa, \tag{2.23}$$

alors l'estimateur $\widehat{J}^{(1)}(m,\lambda)$ *satisfait* $\mathbf{P}(\widehat{J}^{(1)}(m,\lambda) \neq J) \le (8d/d^*)^{-d^*}$.

Si on regarde les conditions du Théorème 2.12 assurant la consistance de $\widehat{J}^{(1)}_n$, il devient clair que la contrainte la plus importante est la seconde inégalité dans (2.23). En gros, cette condition requiert que $d^* N(d^*, \vartheta) \log(d/d^*)/n$ soit majoré par une certaine constante. D'après les résultats énoncés dans la Section 2.3, $N(d^*, \vartheta)$ diverge exponentiellement vite, rendant l'inégalité (2.23) impossible pour d^* plus grand que $\log n$ à une constante multiplicative près.

Soulignons aussi que bien que l'on exige la P_X-p.s. bornitude de f par une certaine constante L_∞, cette constante n'est pas nécessaire pour calculer l'estimateur proposé dans le Théorème 2.12. Seulement des constantes reliées à certaines fonctionnelles quadratiques de la suite de coefficients de Fourier $\theta_{\boldsymbol{k}}[\mathsf{f}]$ apparaissent dans les paramètres m et λ. Ce point pourrait être important pour fabriquer des estimateurs pratiques de J, puisque l'estimation de fonctionnelles quadratiques est plus réaliste, voir par exemple [62, 16], que l'estimation de la norme sup.

Le Théorème 2.12 peut être reformulé pour caractériser le niveau de pertinence κ pour les composantes pertinentes de $\boldsymbol{X}$ rendant leur identification possible. En fait, une façon alternative d'énoncer le Théorème 2.12 est le suivant : sous les conditions **[C1-C4]** si ϑ est un paramètre arbitraire satisfaisant la première inégalité dans (2.23), alors l'estimateur $\widehat{J}^{(1)}_n(m,\lambda)$—avec m et λ choisis comme dans le Théorème 2.12—satisfait $\mathbf{P}(\widehat{J}^{(1)}_n(m,\lambda) \neq J) \le (8d/d^*)^{-d^*}$ si le plus petit niveau de pertinence κ pour les composantes X_j de $\boldsymbol{X}$ avec $j \in J$ n'est pas plus petit que $8\lambda^2 N(d^*, m^2/d^*)$. Cette affirmation peut être aisément déduite de la preuve du Théorème 2.12.

2.6.2 Optimalité des hypothèses

Une question naturelle est maintenant de vérifier que les hypothèses du Théorème 2.12 sont strictes dans les régimes asymptotiques où la sparsité est fixe et la dimension ambiante croissante, de même que quand la sparsité est croissante.

On suppose que les erreurs ε_i sont des variables gaussiennes standard i.i.d. et on considère la classe fonctionnelle $\Sigma(\kappa, L)$. Le résultat simple suivant montre que les conditions du Théorème 2.12 sont strictes dans le cas d'une dimension intrinsèque fixe.

Proposition 2.13. *Supposons le design $\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_n \in [0,1]^d$ déterministe ou aléatoire. Si pour un certain $\alpha < 1/2$ positif, l'inégalité*

$$\frac{d^* \log(d/d^*)}{n} \geq \kappa \alpha^{-1}$$

est vérifiée, alors il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\inf_{\widetilde{J}_n} \sup_{\mathsf{f} \in \Sigma(\kappa, L)} \mathbf{P}_{\mathsf{f}}(\widetilde{J}_n \neq J_{\mathsf{f}}) \geq c.$$

2.7 Remarques de conclusion

Les résultats prouvés dans les sections précédentes répondent presque exhaustivement aux questions sur l'existence des estimateurs consistants du support de sparsité dans le modèle de bruit blanc gaussien et, dans une moindre mesure, en régression nonparamétrique. En fait tant qu'on s'intéresse aux seuls taux de convergence, on a prouvé que le résultat obtenu dans le Théorème 2.2 en Section 2.4 n'est pas améliorable. Ainsi seulement le problème de trouver les constantes exactes reste ouvert. Pour rendre ces affirmations plus précises, considérons le cadre simplifié $\sigma = \kappa = 1$ et $s = d^*$ et définissons les deux régimes suivants :

- Le régime de sparisté fixe, *i.e.*, quand la taille de l'échantillon n et la dimension ambiante d tendent vers l'infini mais la dimension intrinsèque d^* reste constante ou bornée.
- Le régime de sparsité croissante, *i.e.*, quand la dimension intrinsèque d^* tend vers l'infini avec la taille de l'échantillon n et la dimension ambiante d. Pour simplifier, on va supposer que $d^* = O(d^{1-\epsilon})$ pour un certain $\epsilon > 0$.

Dans le régime de sparsité fixe, au vu des Théorèmes 2.2 et 2.12, l'estimation consistante du support de sparsité peut être effectuée à la fois dans le modèle de bruit blanc gaussien et en régression nonparamétrique dès que

$$\limsup_{n \to \infty} (d^* \log d)/n < c_\star,$$

où $c_\star$ est la constante définie par $c_* = 1/8$ pour le modèle de bruit blanc gaussien et

$$c_\star = \min\Big(\frac{L_2^2}{2L_\infty^2}, \frac{g_{\min}^2}{2^8(1+L_2)^2 N(d^*, 2L)}\Big)$$

pour le modèle de régression. D'un autre côté, par le Théorème 2.9 et la Proposition 2.13, l'estimation consistante du support de sparsité est impossible si

$$\liminf_{n\to\infty}(d^*\log d)/n > c^\star$$

avec $c^\star = 2$. Ainsi, à des constantes multiplicatives près $c_\star$ et $c^\star$ (qui ne sont clairement pas exactes), les résultats des Théorèmes 2.2 et 2.12 ne peuvent pas être améliorés dans le régime de sparsité fixe.

Dans le régime de sparsité croissante, les résultats que l'on obtient dans le modèle de bruit blanc gaussien sont bien plus forts que ceux de la régression nonparamétrique. Dans le premier modèle, en prenant le logarithme des deux côtés de l'inégalité (2.9) et en utilisant la formule (2.17) pour $N(d^*,\cdot) = N_1(d^*,\cdot) - N_2(d^*,\cdot)$, on voit que l'estimation consistante de J est possible quand, pour un certain $\tau > 0$ et pour tout entier n, les deux conditions suivantes sont remplies :

$$\begin{cases} \mathsf{I}_{L+\tau}(z_{L+\tau})d^* + \frac{1}{2}\log d^* + \log\log(d/d^*) - 2\log n < \underline{c}_1, \\ \log d^* + \log\log(d/d^*) - \log n \le \underline{c}_1' \end{cases} \tag{2.24}$$

avec certaines constantes $\underline{c}_1 = \underline{c}_1(L,\tau)$ and $\underline{c}_1' = \underline{c}_1'(L,\tau)$. D'un autre côté, d'après le Théorème 2.9, il existe des constantes $\bar{c}_1$ et $\bar{c}_1'$ telles qu'il est impossible d'estimer J de façon consistante si l'une ou l'autre des conditions suivantes

$$\mathsf{I}_{\gamma_L}(z_{\gamma_L})d^* + \frac{1}{2}\log d^* + \log\log(d/d^*) - 2\log n \ge \bar{c}_1, \tag{2.25}$$

$$\log d^* + \log\log(d/d^*) - \log n \ge \bar{c}_1', \tag{2.26}$$

est satisfaite. D'abord on remarque que le côté gauche de la seconde condition dans (2.24) est exactement le même que le côté gauche de (2.26). Si on compare maintenant le côté gauche de la première condition dans (2.24) avec le côté gauche de (2.25), on voit que seuls les coefficients de d^* diffèrent. Pour mesurer le degré de différence entre ces deux coefficients, on trace dans la Figure 2.4 les graphes des fonctions $L \mapsto \mathsf{I}_L(z_L)$ et $L \mapsto \mathsf{I}_{\gamma_L}(z_{\gamma_L})$, avec γ_L comme dans le Théorème 2.9. On peut observer que les deux courbes sont très proches surtout pour de grandes valeurs de L. Ceci implique que les conditions (2.24) sont presque optimales. Une conséquence simple des inégalités (2.24) et (2.25) est que l'estimation consistante du support de sparsité est possible sous la condition $d^*/\log n \to 0$ et impossible pour $d^*/\log n \to \infty$ quand $n \to \infty$, pourvu que $\log\log(d/d^*) = o(\log n)$.

Toujours dans le régime de sparsité croissante, mais pour la régression nonparamétrique, on a prouvé que l'estimation consistante du support de sparsité est possible à chaque fois que

$$\begin{cases} \mathsf{I}_{L+\tau}(z_{L+\tau})d^* + \frac{1}{2}\log d^* + \log\log(d/d^*) - \log n < \underline{c}_2, \\ \log d^* + \log\log d - \log n < \underline{c}_2' \end{cases} \tag{2.27}$$

avec des constantes $\underline{c}_2 = \underline{c}_2(g_{\min},\sigma,L_2,L)$ et $\underline{c}_2' = 2\log(L_2/L_\infty)$.

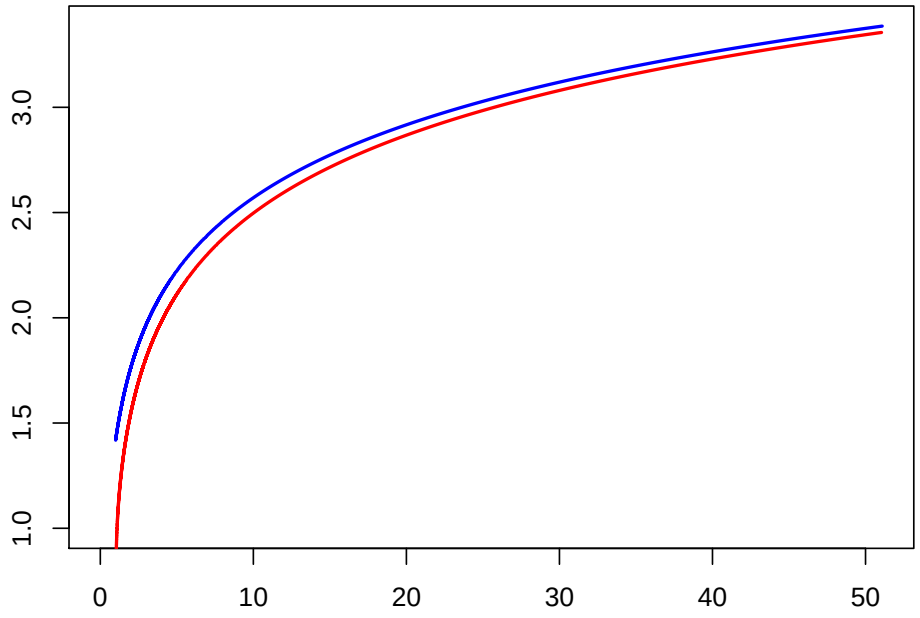


FIGURE 2.4 – Les courbes des fonctions $L \mapsto \mathsf{l}_L(z_L)$ (courbe bleue) et $L \mapsto \mathsf{l}_{\gamma_L}(z_{\gamma_L})$ (courbe rouge).

Comme on l'a déjà mentionné, la seconde condition dans (2.27) est presque optimale, au choix de $\underline{c}_2'$ près, au vu de la Proposition 2.13. Il est naturel de s'attendre à ce que la première condition soit presque optimale aussi, puisqu'elle l'est dans le modèle de bruit blanc Gaussien, qui a la réputation d'être plus simple que le modèle de régression nonparamétrique.

Soulignons que, tout le long de ce travail, on a délibérément évité toute discussion sur les aspects computationnels de la sélection de variables en régression nonparamétrique. Le but de ce travail était d'étudier la possibilité de retrouver J de façon consistante sans s'occuper de la complexité de la procédure. Ceci mène à certaines conditions qui pourraient être considérées comme une référence pour affirmer les propriétés des estimateurs du support de sparsité. Quant aux estimateurs proposés dans la Section 2.2, soulignons que leur complexité de calcul n'est pas toujours prohibitive. Une stratégie est de calculer les coefficients $\widehat{\theta}_{\boldsymbol{k}}$ progressivement ; à chaque étape $K = 1, 2, \ldots, d^*$ on a besoin de calculer et de comparer avec le seuil seulement les coefficients $\widehat{\theta}_{\boldsymbol{k}}$ avec $\|\boldsymbol{k}\|_0 = K$. Si un certain $\widehat{\theta}_{\boldsymbol{k}}$ excède le seuil, alors toutes les variables X^j correspondant aux coordonnées non nulles de $\boldsymbol{k}$ sont considérées comme pertinentes. On peut arrêter le calcul dès que le nombre de variables classifiées comme pertinentes atteint d^*. Tandis que la complexité dans le pire des cas de cette procédure est exponentielle, il y a beaucoup de fonctions f pour lesquelles la complexité de la procédure va être polynomiale en d. Par exemple, c'est le cas pour des modèles additifs dans lesquels $\mathsf{f}(\boldsymbol{x}) = \mathsf{f}_1(x_{i_1}) + \ldots + \mathsf{f}_{d^*}(x_{i_{d^*}})$ pour certaines fonctions univariées $\mathsf{f}_1, \ldots, \mathsf{f}_{d^*}$.

On remarque aussi que dans cette étude, on s'est concentré exclusivement sur la consistance de la sélection de variables sans prêter attention à la consistance de l'estimation de la fonction de régression. Une analyse complète de ce dernier problème étant laissé à un travail futur, remarquons simplement que dans le cas où d^* est fixé, sous les conditions du Théorème 2.12, il est immédiat de construire un estimateur consistant de la fonction de régression. En fait, il suffit d'utiliser un estimateur de projection avec un paramètre de troncature sur l'ensemble des variables pertinentes.

La situation est bien plus délicate dans le cas où la sparsité d^* tend vers l'infini avec la taille de l'échantillon n. Sans doute, la condition (2.24) n'est plus suffisante pour estimer de manière consistante la fonction de régression. La logique derrière cette conjecture est que le taux minimax de convergence pour estimer f dans notre contexte, si on suppose en plus que l'ensemble des variables pertinentes est connu, est égal à $n^{-2/(2+d^*)} = \exp(-2\log n/(2+d^*))$. Si le côté gauche de (2.24) est égal à une constante et $\log\log d = o(\log n)$, alors le taux minimax mentionné ci-dessus ne tend pas vers zéro, rendant ainsi l'estimateur inconsistant.

Finalement, nous voudrions mentionner que la sélection de variables pertinentes est une tâche statistique motivante, qu'il pourrait être utile d'accomplir indépendamment de l'estimation de la fonction de régression. En effet, si on parvient à identifier les variables pertinentes sur un ensemble de données ayant une petite taille d'échantillon, on peut continuer le processus de collecte des données plus efficacement en enregistrant seulement les valeurs des variables pertinentes. Ceci peut réduire considérablement les coûts de mémoire liés au stockage de données et les coûts financiers nécessaires pour collecter de nouvelles données. Ensuite, la fonction de régression peut être estimée plus précisément sur la base de ce nouvel ensemble de données.

2.8 Quelques extensions

2.8.1 Extension à une régularité β quelconque

On considère ici l'extension des résultats précédents à une régularité $\beta > 0$ quelconque. L'ensemble Σ_L auquel la fonction est supposée appartenir est remplacé par l'ensemble suivant

$$\Sigma_{L,\beta} = \Big\{ f : \sum\nolimits_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d} k_j^{2\beta} \langle \mathsf{f}, \varphi_{\boldsymbol{k}}\rangle^2 \le L; \quad \forall j \in \{1,\dots,d\} \Big\}.$$

Dans les définitions des extimateurs, on remplace l'ensemble $S^j_{m,I}$ par le suivant

$$S^j_{m,I,\beta} = \Big\{ \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^d \ : \ \|\boldsymbol{k}\|_{2\beta} \le m \ \text{ and } \ \{j\} \subset \mathrm{supp}(\boldsymbol{k}) \subset I \Big\},$$

et les termes $N(\ell,\gamma)$ par les termes $N(\ell,\gamma,\beta)$ représentant le cardinal de l'ensemble $\{\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^\ell : \|\boldsymbol{k}\|_{2\beta}^{2\beta} \le \gamma\ell \ \&\ k_1 \neq 0\}$.

On obtient alors les mêmes résultats en remplaçant les termes $N(\ell, m_\ell^2/\ell)$ par $N(\ell, m_\ell^2/\ell, \beta)$

dans l'énoncé de la Proposition 2.1 et le terme $N(d^*, \vartheta)$ par $N(d^*, \vartheta, \beta)$ dans l'énoncé du Théorème 2.12.

Le calcul d'un équivalent de $N(d^*, \gamma, \beta)$ se traite de la même manière que pour $\beta = 1$. La fonction h est remplacée par la fonction suivante : $h_\beta(z) = \sum_{z\in\mathbb{Z}} z^{k^{2\beta}}$, ce qui donne une valeur $z_\gamma = z_{\gamma,\beta}$. Le Corollaire 2.7 est identique, la valeur de la constante $\frac{2}{\mathsf{I}_\gamma(z_\gamma)}$ dépendant de β et étant plus petite pour $\beta > 1$. Les formules (2.24) restent intactes hormis le fait que les constantes changent.

2.8.2 Sélection de variables pour les fonctions dans les espaces de Besov

Soit ϕ une fonction d'échelle univariée et ψ une ondelette mère univariée qui engendrent une base orthonormale sur $L_2[0,1]$. Par simplicité d'exposition, on utilise des ondelettes périodisées, où en particulier $\phi \equiv 1$. En dépit du mauvais comportement des ondelettes périodisées près des bords, où elles peuvent donner de grands coefficients pour des fonctions non-périodiques, elles sont communément utilisées puisque leur implémentation numérique est particulièrement simple et n'exige pas des corrections aux bords.

On donne maintenant une construction pour une base d'ondelettes dans $[0,1]^{d^*}$ à partir du couple (ϕ, ψ). On définit $\psi^0 := \phi \equiv 1$ et $\psi^1 := \psi$. A chaque entier $0 \le \epsilon < 2^{d^*}$ écrit sous forme binaire $\epsilon = \epsilon_1, \ldots, \epsilon_{d^*}$ on associe les fonctions d^*-dimensionnelles définies pour $x = (x_1, \ldots, x_{d^*})$ par

$$\psi^\epsilon(x) = \psi^{\epsilon_1}(x_1) \ldots \psi^{\epsilon_{d^*}}(x_{d^*}).$$

Pour toute paire de nombres réels a et b on note $[\![a, b]\!]$ l'ensemble des entiers se trouvant dans l'intervalle $[a, b]$. Pour $j \ge 0$ et $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_{d^*}) \in [\![0, 2^j - 1]\!]^{d^*}$, on note

$$\psi^\epsilon_{j,\boldsymbol{k}}(x) = 2^{d^* j/2} \psi^\epsilon(2^j x_1 - k_1, \ldots, 2^j x_{d^*} - k_{d^*})$$

La famille $\{\psi^\epsilon_{j,\boldsymbol{k}}\}_{1\le\epsilon<2^{d^*}, j\ge 0, \boldsymbol{k}\in[\![0,2^j-1]\!]^{d^*}} \cup \{\psi^0\}$ est une base d'ondelettes (périodiques) de $L^2([0,1]^{d^*})$ (cf.[66] Section 7.7).

Pour une fonction f on note $I(\mathsf{f})$ son support de sparsité. La base introduite dans le précédent paragraphe est adaptée aux fonctions f telles que $I(\mathsf{f}) = \{1, \ldots, d^*\}$. Pour tout $I \in P^d_{d^*}$, on peut fabriquer une base similaire. Tout $I \in P^d_{d^*}$ est considéré comme ordonné : $I = (i_1, \ldots, i_{d^*})$ avec $i_1 < \ldots < i_{d^*}$. Alors on considère

$$\psi^\epsilon(x) = \psi^{\epsilon_1}(x_{i_1}) \ldots \psi^{\epsilon_{d^*}}(x_{i_{d^*}}).$$

On introduit un indice supplémentaire I qui représente le support de sparsité de la fonction de base correspondante. Donc, on considère l'ensemble des fonctions

$$\left\{ \{\psi^{\epsilon,I}_{j,\boldsymbol{k}}\}_{1\le\epsilon<2^{d^*}, j\ge 0, \boldsymbol{k}\in[\![0,2^j-1]\!]^{d^*}} \cup \{\psi^{0,I}\} \right\}_{I\in P^d_{d^*}}.$$

Pour une fonction f, les coefficients par rapport à ce système vont être notés $\boldsymbol{\theta} = \{\theta^{\epsilon,I}_{j,\boldsymbol{k}}(\mathsf{f})\}$.

On définit la classe de régularité à laquelle la fonction de régression est supposée appartenir :

$$\Theta^{\alpha}_{p,2}(L) = \Big\{ \mathsf{f} : \sum_{j\geq 0} 2^{2jd^*(\frac{\alpha}{d^*}+\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} \sum_{1\leq \boldsymbol{\epsilon}<2^{d^*}} \Big(\sum_{\boldsymbol{k}\in[\![0,2^j-1]\!]^{d^*}} |\theta^{\boldsymbol{\epsilon},J}_{j,\boldsymbol{k}}(\mathsf{f})|^p \Big)^{2/p} \leq L \Big\},$$

où p et α sont des nombres réels positifs tels que $p \geq 2$.

Rappelons la définition de l'espace de Besov $B^{\alpha}_{p,q}([0,1]^d)$ pour $p,q \geq 1$. Pour une fonction g on note $\|g\|_{L_p} = \big(\int_{[0,1]^d} |g(x)|^p dx\big)^{1/p}$. Soit Δ_h l'opérateur défini par $\Delta_h \mathsf{f}(x) = \mathsf{f}(x+h) - \mathsf{f}(x)$, et sa m-ième itérée Δ^m_h. Définissons le module de continuité $\omega^2_{m,p}(\mathsf{f},t) = \sup_{|h|\leq t} \|\Delta^m_h \mathsf{f}\|_{L_p}$. Pour $p,q \geq 1$ et $\alpha > 0$, l'espace de Besov $B^{\alpha}_{p,q}([0,1]^d)$ contient les fonctions f telles que

$$\mathsf{f} \in L_p[0,1]^d \quad \text{et} \quad \Big(2^{sj}\omega_{m,p}(\mathsf{f},2^{-j})\Big)_{j\geq 0} \in l_q,$$

où m est un entier tel que $\alpha < m$. Une norme naturelle pour un tel espace est alors donnée par

$$\|\mathsf{f}\|_{B^{\alpha}_{p,q}} = \|\mathsf{f}\|_{L_p} + \|\Big(2^{sj}\omega_{m,p}(f,2^{-j})\Big)_{j\geq 0}\|_q.$$

La base d'ondelettes définie ci-dessus forme une base inconditionnelle dans divers espaces de Besov sur $[0,1]^{d^*}$ et la norme de Besov d'une fonction est reliée à la norme de ses coefficients d'ondelettes dans un espace de suite. En particulier, supposons que l'ondelette mère ψ soit de régularité $r > 0$. Alors pour tout $0 < \alpha < r$, la norme de f dans l'espace de Besov $B^{\alpha}_{p,2}$ est équivalente à la norme sur l'ensemble des coefficients définie ci-dessus (cf, par exemple, [17]).

Pour introduire la procédure d'estimation, pour tout $I \in P^d_{d^*}$ et tout $i \in I$, notons $s_I(i)$ son rang dans I. Considérons une variable non pertinente, *i.e.*, $i \notin J$. Remarquons que $\int \psi^1 = 0$. Donc, pour tout j, $\boldsymbol{k}$ et I tels que $i \in I$, et pour tout ϵ tel que $\epsilon_{s_I(i)} = 1$, on a $\theta^{\epsilon,I}_{j,\boldsymbol{k}} = 0$. Ainsi, l'hypothèse d'identifiabilité prend la forme

$$\forall i \in J \qquad Q^i_J[\mathsf{f}] \triangleq \sum_{\boldsymbol{\epsilon}:\epsilon_{s_J(i)}=1} \sum_{j,\boldsymbol{k}} |\theta^{\boldsymbol{\epsilon},J}_{j,\boldsymbol{k}}|^2 \geq \kappa.$$

Sous la condition de régularité $\mathsf{f} \in \Theta^{\alpha}_{p,2}(L)$, l'estimateur

$$\widehat{Q}^i_{m,J} = \sum_{j=0}^{m} \sum_{\boldsymbol{\epsilon}:\epsilon_{s_J(i)}=1} \sum_{\boldsymbol{k}\in[\![0,2^j-1]\!]^{d^*}} \Big(|y^{\boldsymbol{\epsilon},J}_{j\boldsymbol{k}}|^2 - \frac{1}{n} \Big), \qquad y^{\boldsymbol{\epsilon},I}_{j\boldsymbol{k}} = Y(\psi^{\boldsymbol{\epsilon},I}_{j\boldsymbol{k}}) \tag{2.28}$$

satisfait (au vu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz)

$$\begin{aligned} 0 \leq Q^j_J - \mathbf{E}[\widehat{Q}^j_{m,J}] &\leq \sum_{j>m} \sum_{\boldsymbol{\epsilon}} \sum_{\boldsymbol{k}\in[\![0,2^j-1]\!]^{d^*}} |\theta^{\boldsymbol{\epsilon},J}_{j\boldsymbol{k}}|^2 \\ &\leq \sum_{j>m} \sum_{1\leq\boldsymbol{\epsilon}<2^{d^*}} 2^{-2j\alpha} \Big(\sum_{\boldsymbol{k}\in[\![0,2^j-1]\!]^{d^*}} 2^{jpd^*(\frac{\alpha}{d^*}+\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} |\theta^{\boldsymbol{\epsilon},J}_{j\boldsymbol{k}}|^p \Big)^{\frac{2}{p}} \\ &\leq L 2^{-2(m+1)\alpha}. \end{aligned} \tag{2.29}$$

En conséquence, pour s'assurer que $\mathbf{E}[\widehat{Q}^j_{m,J}] \geq \kappa/2$, on a besoin de choisir m comme suit :

$$2^{-2(m+1)\alpha} \leq \frac{\kappa}{2L}.$$

Ceci mène au choix

$$m = \left\lceil \frac{\log_2(2L/\kappa)}{2\alpha} \right\rceil.$$

Le choix de λ est suggéré par le fait que la probabilité de l'événement

$$\max_{I \in P^d_{d^*}} \max_{i \in J^c \cap I} \sum_{j=0}^{m} \sum_{\boldsymbol{\epsilon}^I, \boldsymbol{k}^I} ((\xi^{\boldsymbol{\epsilon},I}_{j\boldsymbol{k}})^2 - 1) \geq n\lambda$$

est faible. Remarquons que

$$\sum_{j=0}^{m} \sum_{\boldsymbol{\epsilon}^I, \boldsymbol{k}^I} 1 = \sum_{j=0}^{m} 2^{d^*(1+j)} \leq 2^{d^*(m+1)+1}.$$

Ainsi, on doit choisir

$$n\lambda \geq 2\sqrt{2^{d^*(m+1)} A d^* \log(2ed/d^*)} + A d^* \log(2ed/d^*)$$

pour un certain $A > 2$. Une expression simple satisfaisant cette inégalité est donnée par

$$\lambda = \frac{2^{1+d^*/2}(2L/\kappa)^{d^*/4\alpha}\sqrt{A d^* \log(2ed/d^*)} + A d^* \log(2ed/d^*)}{n}. \tag{2.30}$$

Maintenant, en répétant la preuve de la Proposition 2.5, on obtient le résultat suivant.

Proposition 2.14. *Soit p, α des réels strictement positifs tel que $p \geq 2$. Définissons l'estimateur*

$$\widehat{J}^w_n = \left\{ i \in [\![1, d]\!] : \max_{I \in P^d_{d^*}} \max_{i \in I} \widehat{Q}^i_{m,I} \geq \lambda \right\}$$

avec

$$m = \left\lceil \frac{\log_2(2L/\kappa)}{2\alpha} \right\rceil$$

et

$$\lambda = \frac{2^{2+d^*/2}(2L/\kappa)^{d^*/4\alpha}\sqrt{d^* \log(2ed/d^*)} + 4d^* \log(2ed/d^*)}{n}.$$

Si $8\lambda \leq \kappa$, alors $\widehat{J}^w_n$ satisfait

$$\sup_{\mathsf{f} \in \Theta^\alpha_{p,2}(L)} \mathbf{P}(\widehat{J}^w_n \neq J) \leq 3(2ed/d^*)^{-d^*}.$$

2.9 Preuves

2.9.1 Preuve de la Proposition 2.5

Pour simplifier les notations, on écrit $\widehat{J}_1$ au lieu de $\widehat{J}_{1,n}(m,\lambda)$. D'une part, si l'événement

$$\mathcal{A}_\lambda = \left\{ \max_{j,\boldsymbol{k}\in S^j_{m,d^*}} |\xi_{\boldsymbol{k}}| \leq n^{1/2}\lambda \right\}$$

est réalisé, alors $J^c \subset \widehat{J}_1^c$ (ou, de façon équivalente, $\widehat{J}_1 \subset J$). Ainsi la probabilité de $\widehat{J}_1 \subset J$ est au moins aussi grande que $\mathbf{P}(\mathcal{A}_\lambda)$. D'autre part, on montre que sous la condition (2.16) l'événement $J \not\subset \widehat{J}_1$ est au plus aussi grand que $\mathcal{A}_\lambda^c$. il est clair que

$$\begin{aligned}
\{J \not\subset \widehat{J}_1\} &= \left\{\exists j \in J \text{ s.t. } \max_{\boldsymbol{k}\in S^j_{m,d^*}} |y_{\boldsymbol{k}}| \leq \lambda \right\} \\
&\subset \left\{\exists j \in J \text{ s.t. } |\theta_{\boldsymbol{k}}[\mathsf{f}]| \leq \lambda + n^{-1/2}|\xi_{\boldsymbol{k}}|,\ \forall \boldsymbol{k} \in S^j_{m,d^*}\right\} \\
&\subset \left(\left\{\exists j \in J \text{ s.t. } |\theta_{\boldsymbol{k}}[\mathsf{f}]| \leq \lambda + n^{-1/2}|\xi_{\boldsymbol{k}}|,\ \forall \boldsymbol{k} \in S^j_{m,d^*}\right\} \cap \mathcal{A}_\lambda\right) \cup \mathcal{A}_\lambda^c \\
&\subset \left\{\exists j \in J \text{ s.t. } \max_{\boldsymbol{k}\in S^j_{m,d^*}} |\theta_{\boldsymbol{k}}[\mathsf{f}]| \leq 2\lambda\right\} \cup \mathcal{A}_\lambda^c.
\end{aligned}$$

On montre maintenant que le premier ensemble de la dernière ligne est vide. Si ce n'était pas le cas, alors pour une certaine valeur j_0 on aurait $Q_{j_0} \geq \kappa$ et $|\theta_{\boldsymbol{k}}[\mathsf{f}]| \leq 2\lambda$, pour tout $\boldsymbol{k} \in S^{j_0}_{m,d^*}$. Ceci impliquerait que

$$Q_{j_0,m,d^*} \triangleq \sum_{\boldsymbol{k}\in S^{j_0}_{m,d^*}} \theta_{\boldsymbol{k}}[\mathsf{f}]^2 \leq 4\lambda^2 N(d^*, m^2/d^*).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
Q_{j_0} - Q_{j_0,m,d^*} &\leq \sum_{\|\boldsymbol{k}\|_2 \geq m} \theta_{\boldsymbol{k}}[\mathsf{f}]^2 \leq m^{-2} \sum_{\|\boldsymbol{k}\|_2\geq m} \sum_{j\in J} k_j^2 \theta_{\boldsymbol{k}}[\mathsf{f}]^2 \\
&\leq m^{-2} L d^*.
\end{aligned}$$

Remarquons maintenant que le choix du paramètre de coupure m proposé dans l'énoncé du théorème implique que $Q_{j_0} - Q_{j_0,m,d^*} \leq \kappa/2$. En combinant ces estimations, on obtient

$$Q_{j_0} \leq 0.5\kappa + 4\lambda^2 N(d^*, m^2/d^*),$$

ce qui est impossible puisque $Q_{j_0} \geq \kappa$. Ainsi, on a prouvé que $\{J \not\subset \widehat{J}_1\} \subset \mathcal{A}_\lambda^c$, ce qui implique que $\mathcal{A}_\lambda \subset \{J \subset \widehat{J}_1\}$. Ainsi,

$$\mathcal{A}_\lambda \subset \{J \subset \widehat{J}_1\} \cap \{\widehat{J}_1 \subset J\} = \{\widehat{J}_1 = J\}.$$

Le cardinal de l'ensemble $S_{m,d^*} = \cup_j S^j_{m,d^*}$ admet la borne supérieure simple suivante :

$$\mathrm{Card}(S_{m,d^*}) = \sum_{s=0}^{d^*} \binom{d}{s} (2m)^s \leq (2m)^{d^*} \sum_{s=0}^{d^*} \frac{(d)^s}{s!} \leq 3(2md)^{d^*}.$$

Cette borne très grossière va être suffisante pour nos besoins. En utilisant l'inégalité de Bonferroni et les inégalités bien connues concernant les queues de la distribution gaussienne standard, on otient

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\widehat{J}_1 \neq J) \leq \mathbf{P}(\mathcal{A}_\lambda^c) &\leq \sum_{\boldsymbol{k}\in S_{m,d^*}} \mathbf{P}(|\xi_{\boldsymbol{k}}| > n^{1/2}\lambda) \\ &\leq 3(2md)^{d^*} e^{-n\lambda^2/2} \\ &\leq 3d^{-d^*(A-1)}\end{aligned}$$

et on a la conclusion.

2.9.2 Preuve de la Proposition 2.1

Pour simplifier les notations, on écrit $\widehat{J}_n$ au lieu de $\widehat{J}_n(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\lambda})$. Il est clair que $\widehat{J}_n \not\subset J$ si et seulement si $\exists j \in J^c$ tel que $\max_{\ell\leq d^*} \lambda_\ell^{-1} \max_{I\in P_\ell^d} \widehat{Q}^j_{m_\ell,I} \geq 1$, où $Q^j_{m,I} = \sum_{\boldsymbol{k}\in S^j_{m,I}} \theta^2_{\boldsymbol{k}}$. Pour tout $j \in \{1,\dots,d\}$, posons

$$R^j_{m,I} = \sum_{\boldsymbol{k}\in S^j_{m,I}} (\xi^2_{\boldsymbol{k}} - 1)$$

et

$$N^j_{m,I} = (Q^j_{m,I})^{-1/2} \sum_{\boldsymbol{k}\in S^j_{m,I}} \theta_{\boldsymbol{k}}\xi_{\boldsymbol{k}} \text{ si } Q^j_{m,I}) \neq 0$$

et $N^j_{m,I} = 0$ sinon, de sorte que

$$\widehat{Q}^j_{m,I} = \sum\nolimits_{\boldsymbol{k}\in S^j_{m,I}} \Big(y^2_{\boldsymbol{k}} - \frac{1}{n}\Big) = Q^j_{m,I} + \frac{2\sqrt{Q^j_{m,I}}}{\sqrt{n}} N^j_{m,I} + \frac{1}{n} R^j_{m,I}. \tag{2.31}$$

Pour $j \in J^c$, les deux premiers termes de la dernière somme s'annulent et donc, on a

$$\Big\{\widehat{J}_n \not\subset J\Big\} = \bigcup_{j\in J^c} \bigcup_{\ell\leq d^*} \bigcup_{I\in P^d_\ell} \Big\{R^j_{m_\ell,I} \geq n\lambda_\ell\Big\} = \bigcup_{\ell\leq d^*} \bigcup_{I\in P^d_\ell} \bigcup_{j\in J^c\cap I} \Big\{R^j_{m_\ell,I} \geq n\lambda_\ell\Big\},$$

où la dernière inégalité vient du fait que $R^j_{m,I} = 0$ si $j \notin I$.

La variable aléatoire $R^j_{m,I}$, étant une somme de carrés de variables aléatoires gaussiennes standard indépendantes, suit une distribution du χ^2 centrée. Les queues de cette distribution peuvent être évaluées en utilisant le résultat suivant.

Lemme 2.15 (cf. Lemme 1 dans [62]). *Soit $\xi_1, ..., \xi_D$ des variables aléatoires gaussiennes indépendantes. Pour tout $x \geq 0$ et tout vecteur $\boldsymbol{a} = (a_1, ..., a_D) \in \mathbb{R}^D_+$, les inégalités suivantes sont vérifiées :*

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\Big(\sum\nolimits_{i=1}^D a_i(\xi_i^2 - 1) \geq 2\|\boldsymbol{a}\|_2\sqrt{x} + 2\|\boldsymbol{a}\|_\infty x\Big) &\leq \exp(-x), \\ \mathbf{P}\Big(\sum\nolimits_{i=1}^D a_i(\xi_i^2 - 1) \leq -2\|\boldsymbol{a}\|_2\sqrt{x}\Big) &\leq \exp(-x).\end{aligned}$$

On applique ce lemme à $R^i_{m_\ell,I}$, pour lequel $a_{\boldsymbol{k}} = \mathbf{1}_{k\in S^j_{m_l,I}}$ et donc $\|\boldsymbol{a}\|_\infty = 1$ and $\|\boldsymbol{a}\|_2^2 = N(\ell, m_\ell^2/\ell)$. En posant $n\lambda_\ell = 2\sqrt{N(\ell, m_\ell^2/\ell)x} + 2x$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\Big(\widehat{J}_n \not\subset J\Big) &\le \mathbf{P}\Big(\bigcup_{\ell=1}^{d^*}\Big\{\max_{I\in P^d_\ell; i\in I} R^i_{m_\ell,I} \ge n\lambda_\ell\Big\}\Big)\\ &\le \sum_{\ell=1}^{d^*} \ell\,\mathrm{Card}(P^d_\ell)\max_{I\in P^d_\ell; i\in I}\mathbf{P}\Big(R^i_{m_\ell,I} > n\lambda_\ell\Big) \qquad (2.32)\\ &\le e^{-x}\sum_{\ell=1}^{d^*}\ell\binom{d}{\ell}.\end{aligned}$$

On utilise le fait que $\sum_{\ell=1}^{d^*}\ell\binom{d}{\ell} \le \left(2ed/d^*\right)^{d^*}$ est vérifiée pour toute paire d'entiers (d^*, d) tels que $1 \le d^* \le d$ (cf le lemme 2.20 ci-dessous).

Donc, pour $x = Ad^*\log(2ed/d^*)$, on obtient $\mathbf{P}(\widehat{J}_n \not\subset J) \le (2ed/d^*)^{-(A-1)d^*}$.

2.9.3 Preuve du Théorème 2.2

On commence par prouver un résultat plus fort qui implique l'affirmation du Théorème 2.2.

Proposition 2.16. *Soit α un nombre réel dans $(0,1)$. Si pour tout $j \in J$ et pour $s = \mathrm{Card}(J)$ l'inégalité*

$$Q^j_{m_s,J} \ge \left\{\left[\lambda_s + \frac{2\sqrt{N(s,m_s^2/s)\log(2s/\alpha)}+1}{n}\right]^{1/2} + \left[\frac{2\log(2s/\alpha)}{n}\right]^{1/2}\right\}^2 \qquad (2.33)$$

est vérifiée, alors $\mathbf{P}(J \not\subset \widehat{J}_n) \le \alpha$.

Démonstration. Pour majorer la probabilité d'erreur de deuxième espèce, on utilise l'équivalence : $J \not\subset \widehat{J}_n$ si et seulement si $\exists\, j \in J$ tel que $\max_{\ell\le d^*}\lambda_\ell^{-1}\max_{I\in P^d_\ell}\widehat{Q}^j_{m,I} \le 1$.

On rappelle que $s = \mathrm{Card}(J)$. En utilisant l'inégalité de Bonferroni, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(J \not\subset \widehat{J}_n) &\le \sum\nolimits_{j\in J}\mathbf{P}\Big(\max_{\ell\le d^*}\lambda_\ell^{-1}\max_{I\in P^d_\ell}\widehat{Q}^j_{m,I} \le 1\Big)\\ &\le \sum\nolimits_{j\in J}\mathbf{P}\Big(\widehat{Q}^j_{m_s,J} \le \lambda_s\Big) \qquad (2.34)\\ &\le s\max_{j\in J}\mathbf{P}\Big(\widehat{Q}^j_{m_s,J} \le \lambda_s\Big). \qquad (2.35)\end{aligned}$$

En vertu de la décomposition (2.31),

$$\mathbf{P}\Big(\widehat{Q}^j_{m_s,J} \le \lambda_s\Big) = \mathbf{P}\Big(\Big(\sqrt{Q^j_{m_s,J}} + \frac{1}{\sqrt{n}}N^j_{m_s,J}\Big)^2 + \frac{1}{n}\Big(R^j_{m_s,J} - (N^j_{m_s,J})^2\Big) \le \lambda_s\Big).$$

On vérifie que $R^j_{m_s,J} - (N^j_{m_s,J})^2 + N(s, m_s^2/s)$ est tiré d'une distribution du χ^2 avec $N(s, m_s^2/s) - 1$ degrés de liberté (si on appelle P_ξ le projeté orthogonal du vecteur

$(\xi_{\boldsymbol{k}})_{\boldsymbol{k}\in S^j_{m,I}}$ sur l'orthogonal du vecteur $(\theta_{\boldsymbol{k}})_{\boldsymbol{k}\in S^j_{m,I}}$, on a $R^j_{m_s,J} - (N^j_{m_s,J})^2 + N(s, m_s^2/s) = \|P_\xi\|_2^2$). Ainsi, en utilisant le lemme 2.15 énoncé dans la section précédente, on obtient

$$\mathbf{P}\Big(\frac{1}{n}(R^j_{m_s,J} - (N^j_{m_s,J})^2) + \frac{1}{n} \le -2\sqrt{N(s, m_s^2/s)\log(2s/\alpha)}\Big) \le \frac{\alpha}{2s}.$$

Donc, $\mathbf{P}(\widehat{Q}^j_{m_s,J} \le \lambda_s)$ est majoré par

$$\frac{\alpha}{2s} + \mathbf{P}\Big(\Big(\sqrt{Q^j_{m_s,J}} + \frac{1}{\sqrt{n}}N^j_{m_s,J}\Big)^2 \le \lambda_s + \frac{2\sqrt{N(s, m_s^2/s)\log(2s/\alpha)} + 1}{n}\Big).$$

En utilisant la condition de la proposition, on obtient

$$\mathbf{P}(\widehat{Q}^j_{m_s,J} \le \lambda_s) \le \frac{\alpha}{2s} + \mathbf{P}(N^j_{m_s,J} \le -\sqrt{2\log(2s/\alpha)}) \le \frac{\alpha}{s}.$$

En combinant cette inégalité avec (2.34), on obtient le résultat de la Proposition 2.16. □

Pour déduire l'affirmation du Théorème 2.2 à partir de la Proposition 2.16, on utlise la borne inférieure suivante :

$$\begin{aligned} Q^j_{m_s,J} &= Q^j - \sum_{j\in\mathrm{supp}(\boldsymbol{k})\subset J} \theta^2_{\boldsymbol{k}}\mathbf{1}_{\{\|\boldsymbol{k}\|_2\ge m_s\}} && (2.36)\\ &\ge \kappa - \sum_{j\in\mathrm{supp}(\boldsymbol{k})\subset J} \theta^2_{\boldsymbol{k}}\mathbf{1}_{\{\|\boldsymbol{k}\|_2\ge m_s\}} \\ &\ge \kappa - m_s^{-2}\sum_{j\in\mathrm{supp}(\boldsymbol{k})\subset J} \theta^2_{\boldsymbol{k}}\|\boldsymbol{k}\|_2^2 && (2.37)\\ &\ge \kappa - m_s^{-2}Ls, && (2.38)\end{aligned}$$

pour tout $j \in J$. Notre choix de m_s, $m_s = \sqrt{sL(1+\tau)/\kappa}$, assure que

$$Q^j_{m_s,J} \ge \kappa\tau/(1+\tau).$$

Finalement, en utilisant une borne très grossière (ce qui est suffisant pour nos besoins), le côté droit de (2.33) peut être majoré par $4\lambda_s$ si α est choisi égal à $2(2ed/d^*)^{-(A-1)d^*}$.

Ainsi, si $\frac{\kappa\tau}{1+\tau} \ge 4\lambda_s$, alors (2.33) est vérifiée avec $\alpha = 2(2ed/d^*)^{-(A-1)d^*}$. En conséquence, l'erreur de type II a une probabilité inférieure ou égale à $2(2ed/d^*)^{-(A-1)d^*}$.

2.9.4 Preuve de la Proposition 2.6

Preuve de la première assertion Cette preuve peut se trouver dans [68], on répète ici les arguments de façon à être exhaustif.

On rappelle que $N_1(d^*, \gamma)$ admet une représentation intégrale avec l'integrande :

$$\frac{\mathsf{h}(z)^{d^*}}{z^{\gamma d^*}}\frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z(1-z)}\exp\left[d^*\log\left(\frac{\mathsf{h}(z)}{z^\gamma}\right)\right].$$

Pour tout $y > 0$, on définit

$$\phi(y) = e^{-y}\mathsf{h}'(e^{-y})/\mathsf{h}(e^{-y}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2 e^{-yk^2} / \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-yk^2}$$

de sorte que

$$\phi(y) = \gamma \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\mathsf{h}'(e^{-y})}{\mathsf{h}(e^{-y})} = \frac{\gamma}{e^{-y}} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathsf{l}'_\gamma(e^{-y}) = 0.$$

En vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $\sum k^4 e^{-yk^2} \sum e^{-yk^2} > (\sum k^2 e^{-yk^2})^2$, $\forall y \in (0,\infty)$, impliquant que $\phi'(y) < 0$ pour tout $y \in (0,\infty)$, *i.e.*, ϕ est strictement croissant. De plus, ϕ est évidemment continu avec $\lim_{y\to 0}\phi(y) = +\infty$ et $\lim_{y\to\infty}\phi(y) = 0$.

Ces propriétés impliquent l'existence et l'unicité de $y_\gamma \in (0,\infty)$ tel que $\phi(y_\gamma) = \gamma$. De plus, en tant qu'inverse d'une fonction croissante, la fonction $\gamma \mapsto y_\gamma$ est décroissante. On pose $z_\gamma = e^{-y_\gamma}$ de sorte que $\gamma \mapsto z_\gamma$ est croissant. On a aussi

$$\begin{aligned}
\mathsf{l}''_\gamma(z_\gamma) &= \frac{\mathsf{h}''\mathsf{h} - (\mathsf{h}')^2}{\mathsf{h}^2}(z_\gamma) + \frac{\gamma}{z_\gamma^2} \\
&= z_\gamma^{-2}\left\{ \frac{\sum_k (k^4 - k^2) z_\gamma^{k^2}}{\sum_k z_\gamma^{k^2}} - \left(\frac{\sum_k k^2 z_\gamma^{k^2}}{\sum_k z_\gamma^{k^2}}\right)^2 + \gamma \right\} \\
&= z_\gamma^{-2}\{ -\phi'(y_\gamma) - \phi(y_\gamma) + \gamma \} \\
&= -z_\gamma^{-2}\phi'(y_\gamma) > 0.
\end{aligned}$$

Preuve de la seconde assertion On applique la méthode du point-selle à l'intégrale représentant N_1 voir, *e.g.*, le chapitre IX dans [25]. On a

$$N_1(d^*,\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=z_\gamma} \frac{\mathsf{h}(z)^{d^*}}{z^{\gamma d^*}} \frac{dz}{z(1-z)} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=z_\gamma} \{z(1-z)\}^{-1} e^{d^*\mathsf{l}_\gamma(z)} dz. \tag{2.39}$$

La première assertion de la proposition nous a fourni un nombre réel z_γ tel que $\mathsf{l}'_\gamma(z_\gamma) = 0$ et $\mathsf{l}''_\gamma(z_\gamma) > 0$. La tangente à la courbe de plus forte pente en z_γ est verticale. Le chemin que l'on choisit pour l'intégration est le cercle de centre 0 et de rayon z_γ. Comme ce cercle et la courbe de plus forte pente ont la même tangente en z_γ, en appliquant la formule (1.8.1) de [25] (avec $\alpha = 0$ puisque $\mathsf{l}''(z_\gamma)$ est réelle et positive), on obtient que

$$\oint_{|z|=z_\gamma} \{z(1-z)\}^{-1} e^{d^*\mathsf{l}_\gamma(z)} dz = \sqrt{\frac{2\pi}{d^*\mathsf{l}''_\gamma(z_\gamma)}}\, e^{\mathrm{i}\pi/2}\{z_\gamma(1-z_\gamma)\}^{-1} e^{d^*\mathsf{l}_\gamma(z_\gamma)}(1+o(1)),$$

quand $d^* \to \infty$, dès que la condition [2] $\Re[\mathsf{l}_\gamma(z) - \mathsf{l}_\gamma(z_\gamma)] \le -\mu$ est satisfaite pour un certain $\mu > 0$ et pour tout z appartenant au cercle $|z| = |z_\gamma|$ et pas trop proche de z_γ. Pour vérifier que ceci est bien le cas, nous remarquons que $\Re[\mathsf{l}_\gamma(z)] = \log|\frac{\mathsf{h}(z)}{z^\gamma}|$. D'où, si $z = z_\gamma e^{\mathrm{i}\omega}$ avec

2. $\Re u$ veut dire pour la partie réelle du nombre complexe u.

$\omega \in [\omega_0, 2\pi - \omega_0]$ pour un certain $\omega_0 \in]0, \pi[$, alors

$$\begin{aligned}\left|\frac{\mathsf{h}(z)}{z^\gamma}\right| &= \frac{|1 + 2z + 2\sum_{k>1} z^{k^2}|}{z_\gamma^\gamma} \\ &\leq \frac{|1+z| + z_\gamma + 2\sum_{k>1} z_\gamma^{k^2}}{z_\gamma^\gamma} \\ &\leq \frac{|1 + e^{\mathrm{i}\omega_0} z_\gamma| + z_\gamma + 2\sum_{k>1} z_\gamma^{k^2}}{z_\gamma^\gamma}.\end{aligned}$$

Donc $\Re[\mathsf{l}_\gamma(z) - \Re\mathsf{l}_\gamma(z_\gamma)] \leq -\mu$ avec $\mu = \log\left(\frac{1+2z_\gamma+2\sum_{k>1} z_\gamma^{k^2}}{|1+z_\gamma e^{\mathrm{i}\omega_0}|+z_\gamma+2\sum_{k>1} z_\gamma^{k^2}}\right) > 0$. Ceci complète la preuve pour le terme $N_1(d^*, \gamma)$. On traite le terme $N_2(d^*, \gamma)$ de la même manière.

2.9.5 Preuve du Théorème 2.9

Pour prouver i) nous appliquons le lemme 2.8 avec $M = \binom{d}{d^*}$ en conjonction avec un résultat standard donné dans le lemme suivant.

Lemme 2.17. *Soit S un sous-ensemble de $\mathbb{Z}^d$ de cardinal $|S|$ et A une constante. Definissons μ_S une mesure discrète à support sur l'ensemble fini de fonctions*

$$\{\mathsf{f}_{\boldsymbol{\omega}} = \sum_{\boldsymbol{k}\in S} A\omega_{\boldsymbol{k}}\varphi_{\boldsymbol{k}} : \boldsymbol{\omega} \in \{\pm 1\}^S\}$$

tel que

$$\mu_S(\mathsf{f} = \mathsf{f}_{\boldsymbol{\omega}}) = 2^{-|S|} \text{ pour tout } \boldsymbol{\omega} \in \{\pm 1\}^S.$$

Si on définit la mesure de probabilité $\mathbb{P}_S$ par $\mathbb{P}_S(A) = \frac{1}{2^S}\sum_{\boldsymbol{\omega}\in\{\pm1\}^S} \mathbf{P}_{\mathsf{f}_{\boldsymbol{\omega}}}(A)$,, pour tout ensemble mesurable $A \subset \mathbb{R}^n$, et $\mathbb{P}_0 = \mathbf{P}_{\mathsf{f}_0}$, alors

$$\mathcal{K}(\mathbb{P}_S, \mathbb{P}_0) \leq |S|A^4n^2.$$

Démonstration. D'abord on précise les notations. Soit $\boldsymbol{y} = \{y_{\boldsymbol{k}} : \boldsymbol{k} \in S\}$ et, pour $\boldsymbol{\omega} \in \{\pm1\}^S$, $\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{\omega}} = \{A\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{k}} : \boldsymbol{k} \in S\}$. Le rapport de vraisemblance entre $\mathbf{P}_{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{P}_{\mathsf{f}_{\boldsymbol{\omega}}}$ et $\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_{\mathsf{f}_0}$ is

$$\frac{d\mathbf{P}_{\boldsymbol{\omega}}}{d\mathbf{P}_0}(\boldsymbol{y}) = \exp\left[-\frac{n\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{\omega}}^2}{2} + n\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{\omega}} \cdot \boldsymbol{y}\right],$$

où, pour un vecteur $\boldsymbol{z} \in \mathbb{Z}^d$, $\boldsymbol{z}^2 = \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{z}$. Alors, le rapport de vraisemblance entre $\mathbb{P}_S$ et $\mathbb{P}_0$ est

$$\frac{d\mathbb{P}_S}{d\mathbb{P}_0}(\boldsymbol{y}) = \exp\left(-\frac{nA^2|S|}{2}\right)\sum_{\boldsymbol{\omega}\in\{\pm1\}^S}\frac{1}{2^{|S|}}\exp\left(n\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{\omega}} \cdot \boldsymbol{y}\right).$$

En conséquence, des calculs simples mènent à

$$\int\left(\frac{d\mathbb{P}_S}{d\mathbb{P}_0}(\boldsymbol{y})\right)^2\mathbb{P}_0(d\boldsymbol{y}) = \left(\frac{\exp(nA^2) + \exp(-nA^2)}{2}\right)^{|S|} \leq \exp(|S|n^2A^4).$$

La dernière inégalité vient de l'inégalité élémentaire $\cosh(x) \leq e^{x^2}$, qui peut être vérifiée en décomposant les fonctions $\cosh(x)$ et e^{x^2} en séries de Taylor et en comparant les termes correspondants. □

Sans perte de généralité, on peut supposer que $\kappa = 1$ (le cas général peut être réduit à celui-ci en remplaçant L et n respectivement par L/κ and $n\kappa$). Ainsi, $\vartheta = L$. On note Σ_L l'ensemble $\Sigma(1, L)$ et on choisit $\mu_0, \ldots, \mu_M$ comme suit :

μ_0 est la mesure de Dirac δ_0, μ_1 est définie comme dans le lemme 2.17 avec

$$S = \mathcal{C}_1(d^*, \gamma_L) \text{ et } A = \big[N(d^*, \gamma_L)\big]^{-1/2}.$$

Les mesures $\mu_2, \ldots, \mu_M$ sont définies de façon similaire et correspondent aux $M-1$ supports restants de cardinal d^* (plus précisément, pour μ_k, en supposant que le numéro k correspond à la partie à d^* éléments parmi d I, dont les éléments sont notés $(I_1, I_2, \ldots, I_{d^*})$, on prend $A = \big[N(d^*, \gamma_L)\big]^{-1/2}$ et $S = S(I) = \Big\{\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^d : k_j = 0 \text{ pour } j \in I^c \text{ et } k_{I_1}^2 + \ldots + k_{I_{d^*}}^2 \leq \gamma d^*\Big\}$).

Au vu des inégalités (2.19) et du lemme 2.8, il suffit de montrer que les mesures μ_ℓ satisfont

$$\mu_\ell(\Sigma_L) = 1 \text{ et } \sum_{\ell=0}^{M} \mathcal{K}(\mathbb{P}_\ell, \mathbb{P}_0) \leq (M+1)\alpha \log M.$$

En combinant le lemme 2.17 avec $\mathrm{Card}(S) = N_1(d^*, \gamma_L)$ et l'inégalité (2.20), on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}(\mathbb{P}_\ell, \mathbb{P}_0) &\leq \frac{n^2 N_1(d^*, \gamma_L)}{N(d^*, \gamma_L)^2} \\
&\leq \frac{n^2 L}{\gamma_L N(d^*, \gamma_L)} \\
&\leq \alpha \log M.
\end{aligned}$$

Maintenant, montrons que $\mu_1(\Sigma_L) = 1$. Par symétrie, ceci va impliquer que $\mu_\ell(\Sigma_L) = 1$ pour tout ℓ.

Puisque μ_1 est à support dans l'ensemble $\{\mathsf{f}_{\boldsymbol{\omega}} : \boldsymbol{\omega} \in \{\pm 1\}^{\mathcal{C}_1(d^*, \gamma_L)}\}$, il est clair que

$$\sum_{k_1 \neq 0} \theta_{\boldsymbol{k}}^2[\mathsf{f}_{\boldsymbol{\omega}}] = A^2[N_1(d^*, \gamma_L) - N_2(d^*, \gamma_L)] = 1$$

et,

$$\begin{aligned}
\sum_{\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^d} k_j^2 \theta_{\boldsymbol{k}}^2[\mathsf{f}_{\boldsymbol{\omega}}] = \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathcal{C}_1(d^*, \gamma_L)} k_j^2 A^2 &= \frac{1}{d^*} \sum_{j=1}^{d^*} \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathcal{C}_1(d^*, \gamma_L)} k_j^2 A^2 \\
&\leq A^2 \gamma_L N_1(d^*, \gamma_L) \\
&\leq \gamma_L \frac{N_1(d^*, \gamma_L)}{N(d^*, \gamma_L)}, \qquad j = 1, \ldots, d^*.
\end{aligned}$$

Les résultats énoncés dans la Section 2.3 impliquent que

$$N_1(d^*, \gamma_L)/N(d^*, \gamma_L) \sim_{d^* \to \infty} 1 + (\mathsf{h}(z_\gamma) - 1)^{-1}.$$

Notre choix de γ_L assure que, pour d^* assez grand, $\mathsf{f}_\omega \in \Sigma_L$. Ceci complète la preuve de l'affirmation i).

Pour prouver ii), on utilise toujours le lemme 2.8 avec $\mu_0 = \delta_0$ et $\mu_\ell = \delta_{\mathsf{f}_\ell}$, où pour tout $\ell \in \{1, \dots, M\}$, f_ℓ est choisie comme suit.

Soit $I_1, \dots, I_M$ tous les sous-ensembles de $\{1, \dots, d\}$ contenant exactement d^* éléments. On définit f_ℓ, for $\ell \neq 0$, par ses coefficients de Fourier $\{\theta^\ell_{\boldsymbol{k}} : \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^d\}$ comme suit :

$$\theta^\ell_{\boldsymbol{k}} = \begin{cases} 1, & \boldsymbol{k} = (k_1, \dots, k_d) = (\mathbf{1}_{1 \in I_\ell}, \dots, \mathbf{1}_{d \in I_\ell}), \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est évident que toutes les fonctions f_ℓ appartiennent à Σ et, de plus, chaque f_ℓ a I_ℓ pour support de sparsité. On vérifie aisément que notre choix de f_ℓ implique

$$\mathcal{K}(\mathbf{P}_{\mathsf{f}_\ell}, \mathbf{P}_{\mathsf{f}_0}) = n\|\mathsf{f}_\ell - \mathsf{f}_0\|_2^2 = n.$$

En conséquence, si $\alpha \log M = \alpha \log \binom{d}{d^*} \geq n$, l'inégalité désirée est satisfaite.

Pour conclure il suffit de remarquer que $\log \binom{d}{d^*} \geq d^* \log(d/d^*)$.

2.9.6 Preuve de la Proposition 2.11

Au vu du Théorème 2.2, appliqué avec $A = 2$ et $\tau = 1$, l'estimation consistante (uniformément en $\mathsf{f} \in \Sigma(\kappa, L)$) de J est possible si

$$\frac{8\sqrt{2N(s, 2L/\kappa)d^* \log(d/d^*)} + 16d^* \log(d/d^*)}{n} \leq \frac{\kappa}{2}.$$

Puisque d^*/s est majoré par une constante, il existe une constante D_1^* telle que le côté gauche de la dernière inéquation est majorée par

$$D_1^* \left\{ \frac{\sqrt{N(s, 2L/\kappa) s \log(d/s)}}{n} \bigvee \frac{s \log(d/s)}{n} \right\}.$$

Comme prouvé dans le lemme 2.18 ci-dessous, $N(s, 2L/\kappa) \leq 0.3(18\pi eL/\kappa)^{s/2}$. Ainsi il existe une constante D_2 telle que

$$\left\{ \frac{\sqrt{N(s, 2L/\kappa) s \log(d/s)}}{n} \bigvee \frac{s \log(d/s)}{n} \right\} \leq \frac{D_2^s \kappa^{-s/4} \sqrt{s \log(d/s)}}{n} \bigvee \frac{s \log(d/s)}{n}.$$

En combinant ces résultats, on voit que sous les conditions $2D_1^* s \log(d/s)/n \leq \kappa$ et

$$2D_1^* \frac{D_2^s \sqrt{s \log(d/s)}}{n} \leq \kappa^{1 + \frac{s}{4}},$$

l'estimation consistante de J est possible.

En prenant $D^* = 2D_1^*(1+D_2^4)$, on complète la preuve de la première affirmation de la proposition.

Pour prouver la seconde assertion, on applique le Théorème 2.9. Puisqu'on a

$$2\gamma_\vartheta \geq \gamma_\vartheta + 1 \geq \frac{\vartheta}{1+(\mathsf{h}(z_{\gamma_\vartheta+1})-1)^{-1}} \geq \frac{\vartheta}{1+(2z_1)^{-1}},$$

on déduit du Théorème 2.9 qu'il existe certaines constantes D_3 et D_4 telles que si

$$D_3\left\{\frac{\sqrt{N(s,D_4/\kappa)s\log(d/s)}}{n} \bigvee \frac{s\log(d/s)}{n}\right\} \geq \kappa$$

alors l'estimation consistante de J est impossible.

Puisque la boule s-dimensionnelle L_2 de rayon $\sqrt{s\gamma}$ contient la boule L_∞ de rayon $\sqrt{\gamma}$, $N(s,D_4/\kappa) \geq (D_5)^s\kappa^{-s/2}$ pour une certaine constante D_5. En réarrangeant les différents termes, on obtient le résultat désiré.

Lemme 2.18. *Pour tout $\gamma \geq 1$ les nombres $N_1(d^*,\gamma) = Card\{\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^{d^*} : \|\boldsymbol{k}\|_2^2 \leq d^*\gamma\}$ admettent la borne supérieure suivante :*

$$N_1(d^*,\gamma) \leq 0.3(9\pi e\gamma)^{d^*/2}.$$

Démonstration. On vérifie immédiatement que si $\|\boldsymbol{k}\|_2^2 \leq d^*\gamma$, alors l'hypercube centré en $\boldsymbol{k}$ de côté 1 est inclus dans la boule centrée à l'origine et de rayon $\sqrt{d^*\gamma}+0.5\sqrt{d^*}$. Donc,

$$N_1(d^*,\gamma) \leq (\sqrt{d^*\gamma}+0.5\sqrt{d^*})^{d^*}\mathrm{Vol}[B_{d^*}(0;1)],$$

où $\mathrm{Vol}[B_{d^*}(0;1)]$ désigne le volume de la boule unité dans $\mathbb{R}^{d^*}$.

En utilisant la formule bien connue pour ce dernier et l'approximation de Stirling, pour tout $d^* \geq 1$, on obtient :

$$\mathrm{Vol}[B_{d^*}(0;1)] = \frac{2\pi^{d^*/2}}{d^*\Gamma(d^*/2)} \in \left(0.3\frac{(4\pi e/d^*)^{d^*/2}}{\sqrt{2d^*}}; 0.4\frac{(4\pi e/d^*)^{d^*/2}}{\sqrt{2d^*}}\right).$$

Ceci implique que

$$N_1(d^*,\gamma) \leq \left(\frac{9\gamma d^*}{4}\right)^{d^*/2}\mathrm{Vol}[B_{d^*}(0;1)] \leq 0.4\left(\frac{9\gamma d^*}{4}\right)^{d^*/2}\frac{(4\pi e/d^*)^{d^*/2}}{\sqrt{2d^*}} \leq 0.3(9\pi e\gamma)^{d^*/2}.$$

Ceci prouve le résultat. □

2.9.7 Preuve du Théorème 2.12

Pour simplifier les notations, on écrit $\widehat{J}$ au lieu de $\widehat{J}_n^{(1)}$ tout au long de la preuve. Les coefficients de Fourier empiriques peuvent être décomposés comme suit :

$$\widehat{\theta}_{\boldsymbol{k}} = \tilde{\theta}_{\boldsymbol{k}} + z_{\boldsymbol{k}},$$

où

$$\tilde{\theta}_{\boldsymbol{k}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{X}_i)}{\mathsf{g}(\boldsymbol{X}_i)}\mathsf{f}(\boldsymbol{X}_i) \;\text{ et }\; z_{\boldsymbol{k}} = \frac{\sigma}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{X}_i)}{\mathsf{g}(\boldsymbol{X}_i)}\varepsilon_i.$$

Si, pour un multi-indice $\boldsymbol{k}$, $\theta_{\boldsymbol{k}} = 0$, alors le coefficient de Fourier empirique correspondant va être proche de zéro avec une grande probabilité. Pour montrer ceci, regardons ce qui se produit avec les $z_{\boldsymbol{k}}$. On a, pour tout nombre réel x,

$$\mathbf{P}(|z_{\boldsymbol{k}}| > x \,|\, \boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n) \leq \exp\Big(-\frac{x^2}{2\sigma_{\boldsymbol{k}}^2}\Big) \quad \forall \boldsymbol{k} \in S_{m,d^*}$$

avec

$$\sigma_{\boldsymbol{k}}^2 = \frac{\sigma^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{X}_i)^2}{\mathsf{g}(\boldsymbol{X}_i)^2} \leq \frac{2\sigma^2}{g_{\min}^2 n}.$$

(On rappelle que $S_{m,d^*} = \cup_j S_{m,d^*}^j$)

Donc, on a

$$\max_{\boldsymbol{k}\in S_{m,d^*}} \mathbf{P}(|z_{\boldsymbol{k}}| > x | \boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n) \leq \exp(-n g_{\min}^2 x^2/4\sigma^2).$$

Ceci entraîne que, en posant

$$\lambda_1 = (8\sigma^2 d^* \log(24\sqrt{\vartheta} d/d^*)/n g_{\min}^2)^{1/2}$$

et en utilisant les inégalités (cf. Lemme 2.19 ci-dessous)

$$\mathrm{Card}(S_{m,d^*}) \leq 0.3\Big(\frac{24\sqrt{\vartheta} d}{d^*}\Big)^{d^*},$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\Big(\max_{\boldsymbol{k}\in S_{m,d^*}} |z_{\boldsymbol{k}}| > \lambda_1 \,|\, \boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n\Big) &\leq \sum_{\boldsymbol{k}\in S_{m,d^*}} \mathbf{P}\Big(|z_{\boldsymbol{k}}| > \lambda_1 \,|\, \boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n\Big) \\
&\leq \mathrm{Card}(S_{m,d^*}) e^{-n g_{\min}^2 \lambda_1^2/4\sigma^2} \\
&\leq 0.3(24\sqrt{\vartheta} d/d^*)^{-d^*}.
\end{aligned}$$

Ensuite, on utilise une inégalité de concentration pour contrôler les grandes déviations des $\tilde{\theta}_{\boldsymbol{k}}$ par rapport à $\theta_{\boldsymbol{k}}$. Rappelons que, au vu de la définition $\tilde{\theta}_{\boldsymbol{k}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{X}_i)}{\mathsf{g}(\boldsymbol{X}_i)}\mathsf{f}(\boldsymbol{X}_i)$, on a $\mathbb{E}(\tilde{\theta}_{\boldsymbol{k}}) = \theta_{\boldsymbol{k}}$. La bornitude de f entraîne

$$|\frac{\varphi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{X}_i)}{\mathsf{g}(\boldsymbol{X}_i)}\mathsf{f}(\boldsymbol{X}_i)| \leq \sqrt{2} L_\infty / g_{\min}.$$

De plus, la borne

$$V = \mathrm{Var}(\frac{\varphi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{X}_i)}{\mathsf{g}(\boldsymbol{X}_i)}\mathsf{f}(\boldsymbol{X}_i)) \leq \int \mathsf{f}^2(\boldsymbol{x}) \frac{\varphi_{\boldsymbol{k}}^2(\boldsymbol{x})}{\mathsf{g}(\boldsymbol{x})} d\boldsymbol{x} \leq 2L_2^2/g_{\min}^2$$

combinée à l'inégalité de Bernstein implique que

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(|\tilde{\theta}_{\boldsymbol{k}} - \theta_{\boldsymbol{k}}| > t) &\leq 2\exp\Big(-\frac{nt^2}{2(V + t\sqrt{2}L_\infty/3g_{\min})}\Big)\\ &\leq 2\exp\Big(-\frac{g_{\min}^2 nt^2}{4L_2^2 + tL_\infty g_{\min}}\Big), \qquad \forall t > 0.\end{aligned}$$

Définissons

$$\lambda_2 = 4L_2\Big(\frac{d^*\log(24\sqrt{\vartheta}d/d^*)}{ng_{\min}^2}\Big)^{1/2}.$$

Alors,

$$\mathbf{P}(|\tilde{\theta}_{\boldsymbol{k}} - \theta_{\boldsymbol{k}}| > \lambda_2) \leq 2\exp\Big(-\frac{4L_2^2 d^*\log(24\sqrt{\vartheta}d/d^*)}{L_2^2 + L_\infty L_2(\frac{d^*\log(24\sqrt{\vartheta}d/d^*)}{n})^{1/2}}\Big).$$

La première inégalité dans la principale condition du théorème implique que le dénominateur dans l'exponentielle n'est pas plus grand que $2L_2^2$. D'où,

$$\mathbf{P}(\max_{\boldsymbol{k}\in S_{m,d^*}} |\tilde{\theta}_{\boldsymbol{k}} - \theta_{\boldsymbol{k}}| > \lambda_2) \leq 0.6/(24\sqrt{\vartheta}d/d^*)^{d^*}.$$

Soit

$$\mathcal{A}_1 = \{\max_{\boldsymbol{k}\in S_{m,d^*}} |z_{\boldsymbol{k}}| \leq \lambda_1\} \quad \text{and} \quad \mathcal{A}_2 = \{\max_{\boldsymbol{k}\in S_{m,d^*}} |\tilde{\theta}_{\boldsymbol{k}}| \leq \lambda_2\}.$$

On vérifie aisément que

$$\mathbf{P}(J^c \not\subset \widehat{J}^c) \leq \mathbf{P}(\mathcal{A}_1^c) + \mathbf{P}(\mathcal{A}_2^c) \leq 0.9/(24\sqrt{\vartheta}d/d^*)^{d^*}.$$

Puisque $d^* \geq 1$ et $\vartheta > 1$, la dernière inégalité implique

$$\mathbf{P}(J^c \not\subset \widehat{J}^c) \leq \mathbf{P}(\mathcal{A}_1^c) + \mathbf{P}(\mathcal{A}_2^c) \leq 0.3/(8d/d^*)^{d^*}.$$

Quant à l'inclusion inverse, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(J \not\subset \widehat{J}) &\leq \mathbf{P}\Big(\exists j \in J \text{ t.q. } \max_{\boldsymbol{k}\in S_{m,d^*}:\, k_j\neq 0} |\widehat{\theta}_{\boldsymbol{k}}| \leq \lambda\Big)\\ &\leq \mathbf{1}\Big\{\exists j \in J \text{ t.q. } \max_{\boldsymbol{k}\in S_{m,d^*}:k_j\neq 0} |\theta_{\boldsymbol{k}}| \leq 2\lambda\Big\} + \mathbf{P}(\mathcal{A}_1^c) + \mathbf{P}(\mathcal{A}_2^c).\end{aligned}$$

On montre maintenant que le premier terme dans la dernière ligne est égal à zéro. Si ce n'était pas le cas, alors pour une certaine valeur j_0, on aurait $Q_{j_0} \geq \kappa$ et $|\theta_{\boldsymbol{k}}| \leq 2\lambda$, pour tout $\boldsymbol{k} \in S_{m,d^*}$ tel que $k_{j_0} \neq 0$. Ceci impliquerait que

$$Q_{j_0,m,d^*} = \sum_{\boldsymbol{k}\in S_{m,d^*}^{j_0}} \theta_{\boldsymbol{k}}^2 \leq 4\lambda^2 N(d^*, m^2/d^*).$$

D'autre part,

$$Q_{j_0} - Q_{j_0,m,d^*} \leq \sum_{\|\boldsymbol{k}\|_2\geq m} \theta_{\boldsymbol{k}}^2 \leq m^{-2}\sum_{\|\boldsymbol{k}\|_2\geq m}\sum_{j\in J} k_j^2\theta_{\boldsymbol{k}}^2 \leq \frac{Ld^*}{m^2}.$$

Remarquons maintenant que le choix du paramètre de troncature m proposé dans l'énoncé de la proposition implique que $Q_{j_0} - Q_{j_0,m,d^*} \leq \kappa/2$. En combinant ces estimations, on obtient

$$Q_{j_0} \leq \frac{\kappa}{2} + 4\lambda^2 N(d^*, m^2/d^*),$$

ce qui est impossible puisque $Q_{j_0} \geq \kappa$.

2.9.8 Preuve de la Proposition 2.13

Soit $M = \binom{d}{d^*}$ et soit $\{\mathsf{f}_0, \mathsf{f}_1, \dots, \mathsf{f}_M\}$ un ensemble inclus dans Σ_L. Soit $I_1, \dots, I_M$ tous les sous-ensembles de $\{1, \dots, d\}$ contenant exactement d^* éléments numérotés arbitrairement.

Posons $\mathsf{f}_0 \equiv 0$ et définissons f_ℓ, pour $\ell \neq 0$, par ses coefficients de Fourier $\{\theta^\ell_{\boldsymbol{k}} : \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^d\}$ comme suit :

$$\theta^\ell_{\boldsymbol{k}} = \begin{cases} 1, & \boldsymbol{k} = (k_1, \dots, k_d) = (\mathbf{1}_{1 \in I_\ell}, \dots, \mathbf{1}_{d \in I_\ell}), \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est immédiat que toutes les fonctions f_ℓ appartiennent à Σ et, en plus, chaque f_ℓ a I_ℓ pour support de sparsité.

On vérifie aisément que notre choix de f_ℓ implique $\mathcal{K}(\mathbf{P}_{\mathsf{f}_\ell}, \mathbf{P}_{\mathsf{f}_0}) = n\|\mathsf{f}_\ell - \mathsf{f}_0\|_2^2 = n$. Ainsi, si

$$\alpha \log M = \alpha \log \binom{d}{d^*} \geq n,$$

l'inégalité désirée est satisfaite. Pour conclure, il suffit de remarquer que $\log \binom{d}{d^*}$ est plus grand ou égal à $d^* \log(d/d^*) = d^*\big(\log d - \log d^*\big)$.

2.9.9 Preuve du Corollaire 2.7

Posons $\gamma = L/\kappa$ et $\gamma_\tau = (1+\tau)\gamma$. En appliquant le Théorème 2.2 avec $A = 2$, on obtient que

$$\mathbf{P}\Big(\widehat{J}_n \neq J\Big) \leq 3(2ed/d^*)^{-d^*}$$

pourvu que la condition

$$\frac{8\sqrt{2N(d^*, \gamma_\tau)\, d^* \log(2ed/d^*)}}{n} + \frac{16 d^* \log(2ed/d^*)}{n} \leq \frac{\kappa\tau}{1+\tau} \tag{2.40}$$

est satisfaite pour un certain $\tau > 0$. Clairement, quand $d \to \infty$, pour tout $d^* \geq 1$, on a

$$(2ed/d^*)^{-d^*} \leq d^{-1/2} \to 0.$$

Ainsi, il suffit de vérifier que les hypothèses

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log\log d}{\log n} = 0, \qquad \limsup_{n\to\infty} \frac{d^*}{\log n} < \frac{2}{\mathsf{I}_\gamma(z_\gamma)} \tag{2.41}$$

impliquent que (2.40) est vraie pour des valeurs suffisamment grandes de n. On va montrer que le côté gauche de (2.40) tend vers 0 quand $n \to \infty$.

D'abord on remarque que (2.41) donne

$$\log d \leq n^{1/3}, \qquad d^* \leq n^{1/3}$$

pour un n suffisamment grand. Donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{16 d^* \log(2ed/d^*)}{n} = 0.$$

Ensuite, par la continuité des applications $\gamma \mapsto \mathsf{I}_\gamma$ et $\gamma \mapsto z_\gamma$, il existe $\tau > 0$ tel que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{d^*}{\log n} < \frac{2}{\mathsf{I}_{\gamma_\tau}(z_{\gamma_\tau})} \Longleftrightarrow \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{d^* \mathsf{I}_{\gamma_\tau}(z_{\gamma_\tau})}{2\log n} - 1 \right) < 0. \tag{2.42}$$

Cette inégalité, combinée avec la relation $\log N(d^*, \gamma_\tau) = d^* \mathsf{I}_{\gamma_\tau}(z_{\gamma_\tau})(1 + o(1))$ (Eq. (2.17), implique que

$$\begin{aligned}
&\log \left\{ \frac{\sqrt{N(d^*, \gamma_\tau)\, d^* \log(2ed/d^*)}}{n} \right\} \\
&\qquad \le \log n \left(\frac{\log N(d^*, \gamma_\tau)}{2\log n} - 1 + \frac{\log d^*}{2\log n} + \frac{\log\log(2ed)}{2\log n} \right) \\
&\qquad \le \log n \Bigg(\underbrace{\frac{d^* \mathsf{I}_{\gamma_\tau}(z_{\gamma_\tau})}{2\log n}(1 + o(1)) - 1}_{\text{tend vers un nombre négatif}} + \underbrace{\frac{\log d^*}{d^*} \frac{d^*}{2\log n} + \frac{\log\log d}{\log n}}_{\text{tend vers 0}} \Bigg) \\
&\qquad \to -\infty.
\end{aligned}$$

Ceci entraîne que le permier terme du côté gauche de (2.40) tend vers zéro, ce qui complète la preuve.

2.9.10 Quelques lemmes techniques

Lemme 2.19. *Soit* $S_{m,d^*} = \{\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^d : \|\boldsymbol{k}\|_2 \le m, \ \& \ \|\boldsymbol{k}\|_0 \le d^*\}$.

Si $m = \sqrt{\gamma d^*}$ *avec* $\gamma \ge 1$, *alors*

$$\mathrm{Card}(S_{m,d^*}) \le 0.3(24\sqrt{\gamma} d/d^*)^{d^*}.$$

Démonstration. Il est clair que

$$\mathrm{Card}(S_{m,d^*}) \le \binom{d}{d^*} N_1(d^*, \gamma).$$

En combinant ceci avec l'inégalité

$$\binom{d}{d^*} \le \left(\frac{ed}{d^*} \right)^{d^*},$$

et le lemme 2.18 , on obtient

$$\mathrm{Card}(S_{m,d^*}) \le \left(\frac{ed}{d^*} \right)^{d^*} 0.3(9\pi e\gamma)^{d^*/2}.$$

L'affirmation du lemme vient maintenant de l'inégalité $\sqrt{9\pi e}e \le 24$. □

Lemme 2.20. *Pour toute paire d'entiers strictement positifs* (d, d^*) *tels que* $d^* \le d$:

$$\sum_{\ell=1}^{d^*} \ell \binom{d}{\ell} \le (2ed/d^*)^{d^*}.$$

Démonstration. On va procéder par récurrence sur d^*. Si $d^* = 1$, on a

$$\sum_{\ell=1}^{d^*} \ell \binom{d}{\ell} = d \leq ed = \left(ed/d^*\right)^{d^*}.$$

Supposons que l'inégalité

$$\sum_{\ell=1}^{d^*} \ell \binom{d}{\ell} \leq \left(2ed/d^*\right)^{d^*}$$

est vérifiée pour un certain $1 \leq d^* < d$. Montrons que ceci entraîne l'inégalité.

$$\sum_{\ell=1}^{d^*+1} \ell \binom{d}{\ell} \leq \left(2ed/(d^*+1)\right)^{d^*+1}.$$

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=1}^{d^*+1} \ell \binom{d}{\ell} &\leq \left(2ed/d^*\right)^{d^*} + d\binom{d-1}{d^*} \\
&= \left(2ed/(d^*+1)\right)^{d^*+1} \frac{d^*+1}{2ed}\left(1+\frac{1}{d^*}\right)^{d^*} + d\left(\frac{e(d-1)}{d^*}\right)^{d^*} \\
&= \left(2ed/(d^*+1)\right)^{d^*+1} \frac{1}{2e}\left(1+\frac{1}{d^*}\right)^{d^*}\left(\frac{d^*+1}{d} + \frac{d^*+1}{2^{d^*}}(1-1/d)^{d^*}\right).
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $(1+1/d^*)^{d^*} \leq e$, $d^* \geq 1$ et $d \geq d^*+1$, on obtient

$$\sum_{\ell=1}^{d^*+1} \ell \binom{d}{\ell} \leq \left(2ed/(d^*+1)\right)^{d^*+1} \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{d^*+1}{d} + \frac{d^*+1}{2^{d^*}}\right)}_{\leq 1+1}$$

et le résultat suit. □

Chapitre 3

Tests d'hypothèses basées sur les fonctionnelles quadratiques

On cherche à tester un type particulier d'hypothèse nulle composite sous un modèle de régression nonparamétrique multivarié. Pour une fonctionnelle quadratique Q, l'hypothèse nulle signifie que la fonction de régression f satisfait la contrainte $Q[f] = 0$, tandis que l'hypothèse alternative correspond aux fonctions pour lesquelles $Q[f]$ est minoré par une constante strictement positive. D'une part, on fournit des taux minimax de test et les constantes de séparation exactes, ainsi que la procédure de test optimale exacte, pour des fonctionnelles quadratiques diagonales et positives. On considère des classes de régularité de forme ellipsoïdale et on vérifie que nos conditions sont remplies dans le cas particulier des ellipsoïdes correspondant à des classes de Sobolev anisotropes. Dans ce cas, on présente une forme fermée du taux minimax et de la constante de séparation exacte. D'autre part, les taux minimax pour les fonctionnelles quadratiques qui ne sont ni positives ni négatives font apparaître deux régimes différents : un régime «régulier» et un régime «irrégulier». Dans le cas régulier, le taux minimax est égal à $n^{-1/4}$ tandis que dans le cas irrégulier, le taux dépend de la classe de régularité et est plus lent que dans le cas régulier. On applique nos résultats au problème de test de l'égalité des normes de deux fonctions observées dans des environnements bruités. Le chapitre est organisé de la façon suivante. Les résultats concernant les asymptotiques exactes pour les fonctionnelles diagonales semi-définies positives sont fournis en Section 3.2. En particulier, les taux de séparation pour une classe générale de tests appelés U-tests linéaires sont donnés dans la Sous-section 3.2.2. Le U-test linéaire asymptotiquement optimal est construit en Sous-section 3.2.3 ainsi que son taux de séparation. On montre qu'il coïncide avec le taux minimax exact en Sous-section 3.2.4. La Section 3.3 est consacrée à une discussion des hypothèses et aux conséquences du principal résultat pour certains exemples significatifs. Les résultats pour les fonctionnelles quadratiques non positives et non négatives sont énoncés dans la Section 3.4 ainsi qu'une application au test de l'égalité des normes de deux signaux. Finalement, les preuves des résultats sont reportés dans l'appendice.

3.1 Introduction

3.1.1 Enoncé du problème

Considérons le modèle de régression nonparamétrique avec un design aléatoire multidimensionnel : on observe $(x_i, \mathbf{t}_i)_{i=1,\dots,n}$ obeissant à la relation

$$x_i = f(\mathbf{t}_i) + \xi_i, \quad i = 1, \dots, n, \tag{3.1}$$

où les $\mathbf{t}_i \in \Delta \subset \mathbb{R}^d$ sont des points de design aléatoires, $1 \leq d < \infty$, $f : \Delta \to \mathbb{R}$ est la fonction de régression et les ξ_i representent le bruit d'observation. Tout le long de ce travail, on suppose que les vecteurs $\mathbf{t}_i = (t_i^1, \dots, t_i^d)$, pour $i = 1, \dots, n$, sont independants et identiquement distribués, avec une distribution uniforme sur $\Delta = [0,1]^d$, ce qui est équivalent à $t_i^k \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{U}(0,1)$. De plus, conditionnellement à $\mathcal{T}_n = \{\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_n\}$, les variables $\xi_1, \dots, \xi_n$ sont supposées i.i.d. avec une moyenne nulle et une variance τ^2, pour un certain $\tau \in (0, \infty)$ connu.

Notons $L_2(\Delta)$ l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable sur Δ et supposons que l'on se donne deux sous-ensembles disjoints $\mathcal{F}_0$ et $\mathcal{F}_1$ of $L_2(\Delta)$. On s'intéresse à l'analyse du problème de test d'hypothèses :

$$H_0 : f \in \mathcal{F}_0 \qquad \text{contre} \qquad H_1 : f \in \mathcal{F}_1. \tag{3.2}$$

Plus précisément, posons $\boldsymbol{z}_i = (x_i, \mathbf{t}_i)$ et notons P_f la distribution de probabilité du vecteur de données $(\boldsymbol{z}_1, \dots, \boldsymbol{z}_n)$ donné par (3.1). L'espérance par rapport à P_f est notée E_f. Le but est de fabriquer une procédure de test $\phi_n : (\mathbb{R} \times \Delta)^n \to \{0,1\}$ pour laquelle on est capable d'établir des garanties en terme de taux d'erreur cumulée (la somme des probabilités d'erreur de première et seconde espèce) :

$$\gamma_n(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \phi_n) = \sup_{f \in \mathcal{F}_0} P_f(\phi_n = 1) + \sup_{f \in \mathcal{F}_1} P_f(\phi_n = 0). \tag{3.3}$$

Pour mesurer la complexité statistique de ce problème de test, il est pertinent d'analyser le taux d'erreur minimax

$$\gamma_n(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1) = \inf_{\phi_n} \gamma_n(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \phi_n), \tag{3.4}$$

où $\inf_{\phi_n}$ représente l'infimum sur toutes les procédures de test.

On se concentre sur un type particulier d'hypothèses nulles H_0 qui peut être défini comme l'ensemble des fonctions se trouvant dans le noyau d'une fonctionnelle quadratique $Q : L_2(\Delta) \to \mathbb{R}$, *i.e.*, $\mathcal{F}_0 \subset \{f \in L_2(\Delta) : Q[f] = 0\}$. Comme on le décrit plus loin dans cette section, ce type d'hypothèses nulles intervient naturellement dans plusieurs problèmes incluant la sélection de variables, le test de la linéarité partielle d'une fonction de régression ou l'égalité des normes de deux signaux. Alors, il est tentant de définir l'alternative comme l'ensemble des fonctions satisfaisant $|Q[f]| > \rho^2$ pour un certain $\rho > 0$. Cependant, sans hypothèse supplémentaire sur la nature des fonctions f, il est impossible de concevoir des

procédures de test consistantes pour discriminer $\mathcal{F}_0$ de $\mathcal{F}_1$. Un moyen de donner du sens à ce problème est de supposer que la fonction f appartient à une classe de régularité. Des exemples typiques de classes de régularité sont les classes de Sobolev et de Hölder, les espaces de Besov ou les boules dans les espaces de Hilbert à noyau reproduisant.

Ici, on suppose que la fonction f appartient à une classe de régularité Σ qui peut être vue comme un ellipsoïde dans l'espace infini-dimensionnel $L_2(\Delta)$. Ainsi, l'hypothèse nulle et l'alternative sont définies par

$$\mathcal{F}_0 = \Big\{ f \in \Sigma : Q[f] = 0 \Big\}, \qquad \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_1(\rho) = \Big\{ f \in \Sigma : |Q[f]| \geq \rho^2 \Big\}. \tag{3.5}$$

On peut remarquer que les deux hypothèses sont composites et nonparamétriques.

3.1.2 Définition du taux minimax et de l'optimalité exacte

Etant données les observations $(x_i, \mathbf{t}_i)_{i=1,\dots,n}$, on considère le problème consistant à tester l'hypothèse composite $\mathcal{F}_0$ contre l'alternative nonparamétrique $\mathcal{F}_1(\rho)$ définie par (3.5). Le but est ici d'obtenir, si possible, à la fois le taux et les asymptotiques exactes de l'erreur cumulée dans le cadre minimax. Ces notions sont définies comme suit. Pour un petit nombre fixé $\gamma \in (0,1)$ la fonction r_n^* est appelée taux minimax de test si :

- il existe $C' > 0$ tel que $\forall\, C < C'$, on a $\liminf_{n\to\infty} \gamma_n(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1(Cr_n^*)) \geq \gamma$,
- il existe $C'' > 0$ et un test ϕ_n tels que

$$\forall\, C > C'', \ \limsup_{n\to\infty} \gamma_n(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1(Cr_n^*), \phi_n) \leq \gamma.$$

Une procédure de test ϕ_n est dite minimax optimale en taux si

$$\limsup_{n\to\infty} \gamma_n(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1(Cr_n^*), \phi_n) \leq \gamma$$

pour un certain $C > 0$. Remarquons que le taux minimax et le test optimal en taux peuvent dépendre du seuil γ donné. Cependant, dans la plupart des situations cette dépendance disparaît du taux et n'apparaît que dans les constantes. Si les constantes C' et C'' coincident, alors leur valeur commune est appelée la constante de séparation exacte et tout test satisfaisant la seconde condition est dit minimax optimal exact. Le taux minimax r_n^* n'est en fait pas défini de façon unique, mais le produit du taux minimax et de la constante de séparation est défini de façon unique à une équivalence asymptotique près. Pour de plus amples détails sur les tests d'hypothèses minimax on renvoie à [51].

Alors que l'optimalité minimax en taux est une caractéristique intéressante pour une procédure de test, elle peut pourtant mener à des tests trop conservatifs. Une solution (partielle) à ce problème est de considérer les asymptotiques exactes du taux d'erreur. En fait, on peut souvent prouver que quand $n \to \infty$,

$$\gamma_n(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1(\rho)) = 2\Phi(-u_n(\rho)) + o(1), \tag{3.6}$$

où Φ est la fonction de répartition de la distribution gaussienne standard, $u_n(\cdot)$ est une fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ et $o(1)$ est un terme tendant vers zéro uniformément en ρ quand

$n \to \infty$. Cette relation implique que, en déterminant r_n^* comme une solution par rapport à ρ de l'équation $u_n(\rho) = z_{1-\gamma/2}$—où z_α représente le α-quantile de la distribution gaussienne standard—on obtient non seulement le taux minimax, mais aussi la constante de séparation exacte. Quand la relation (3.6) est satisfaite, on dit qu'on a des asymptotiques gaussiennes.

3.1.3 Revue des principales contributions

Notre contribution concerne le cas où la classe de régularité Σ est un ellipsoïde de $L_2(\Delta)$ et la fonctionnelle quadratique Q admet une forme diagonale dans la base orthonormale correspondant aux directions des axes de l'ellipsoïde Σ. Plus précisément, soit $\mathcal{L}$ un ensemble dénombrable et $\{\varphi_l\}_{l\in\mathcal{L}}$ un système orthonormal de $L_2(\Delta)$. Pour une fonction $f \in L_2(\Delta)$, soit $\boldsymbol{\theta}[f] = \{\theta_l[f]\}_{l\in\mathcal{L}}$ les coefficients de Fourier généralisés par rapport à ce système, i.e., $\theta_l[f] = \langle f, \varphi_l\rangle$, où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ représente le produit scalaire dans $L_2(\Delta)$. Les ensembles fonctionnels $\Sigma \subset L_2(\Delta)$ considérés sont des sous-ensembles des ellipsoïdes avec des directions d'axes $\{\varphi_l\}_{l\in\mathcal{L}}$ et des coefficients $\mathbf{c} = \{c_l\}_{l\in\mathcal{L}} \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{L}}$:

$$\Sigma \subset \Big\{ f = \sum\nolimits_{l\in\mathcal{L}} \theta_l[f]\varphi_l : \ \sum\nolimits_{l\in\mathcal{L}} c_l\theta_l[f]^2 \le 1 \Big\}. \tag{3.7}$$

La fonctionnelle quadratique diagonale est définie par un ensemble de coefficients $\mathbf{q} = \{q_l\}_{l\in\mathcal{L}}$: $Q[f] = \sum_{l\in\mathcal{L}} q_l\theta_l[f]^2$. Remarquons que si Q est définie positive, *i.e.*, $q_l > 0$ pour tout $l \in \mathcal{L}$, alors l'hypothèse nulle devient $f = 0$ et le problème considéré est connu comme un problème de détection. Cependant, le but de ce travail est de considérer des types plus généraux de fonctionnelles quadratiques diagonales. Deux situations sont examinées : (a) tous les coefficients q_l sont positifs et (b) les deux ensembles $\mathcal{L}_+ = \{l \in \mathcal{L} : q_l > 0\}$ et $\mathcal{L}_- = \{l \in \mathcal{L} : q_l < 0\}$ sont non vides.

Dans la première situation, on établit des asymptotiques gaussiennes du taux d'erreur cumulée et on propose un test minimax optimal exact. Sous certaines conditions, on montre que la suite [1]

$$r_{n,\gamma}^* = \min\Big\{ \rho > 0 : \inf_{\mathbf{v}\in\mathbb{R}_+^{\mathcal{L}}:\langle\mathbf{v},\mathbf{c}\rangle\le 1;\langle\mathbf{v},\mathbf{q}\rangle\ge\rho^2} \|\mathbf{v}\|_2^2 \ge 8n^{-2}z_{1-\gamma/2} \Big\} \tag{3.8}$$

fournit le taux minimax de test avec des constantes $C' = C'' = 1$. Ce résultat est appliqué à certains exemples motivant notre intérêt pour le test des hypothèses (3.5). Un exemple, très lié au problème de sélection de variables du chapitre précédent, consiste à tester la pertinence d'une variable particulière dans un contexte de régression en grande dimension. Ce problème est considéré dans un cadre plus général correspondant à tester le fait qu'une dérivée partielle d'ordre $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$, notée $\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_d} f/\partial t_1^{\alpha_1} \ldots \partial t_d^{\alpha_d}$, est identiquement nulle contre l'hypothèse que cette dérivée est significativement différente de 0. Comme conséquence de notre résultat principal, on montre que si f se trouve dans la boule de Sobolev anisotrope de régularité $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_d)$, et si on pose $\delta = \sum_{i=1}^d \alpha_i/\sigma_i$, $\bar\sigma = \big(\frac{1}{d}\sum_{i=1}^d \sigma_i^{-1}\big)^{-1}$, alors le taux minimax optimal est $r_n^* = n^{-2\bar\sigma(1-\delta)/(4\bar\sigma+d)}$ pourvu

1. On note $\|\cdot\|_2$ et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ la norme et le produit scalaire habituels dans $\ell_2(\mathcal{L})$, l'espace des tableaux de carré intégrables indexé par $\mathcal{L}$.

que $\delta < 1$ et $\bar{\sigma} > d/4$. De plus, on dérive des asymptotiques gaussiennes et on donne la constante de séparation exacte dans ce problème.

La seconde situation que l'on examine concerne le cas où les cardinaux de $\mathcal{L}_+$ et de $\mathcal{L}_-$ sont non nuls. Une application typique de ce genre de problème est le test de l'égalité des normes de deux signaux observés dans des environnements bruités. Dans ce cadre, on fournit des taux minimax de test et on montre la présence de deux régimes que l'on va appeler régime régulier et régime irrégulier. Dans le régime régulier, le taux minimax est $r_n^* = n^{-1/4}$, tandis que dans le cas irrégulier il peut être de la forme n^{-a} avec un $a < 1/4$ qui dépend du degré de régularité de la classe fonctionnelle.

Remarquons que tous nos résultats sont non-adaptatifs : nos procédures de test utilisent de façon explicite les caractéristiques de régularité de la fonction f. L'adaptation à la régularité inconnue pour le problème que l'on considère est une question ouverte pour laquelle les travaux [81, 39] peuvent être utiles.

3.1.4 Lien avec des travaux antérieurs

Depuis les articles fondateurs de Ermakov [29] et Ingster [47, 48, 49], les tests minimax d'hypothèses nonparamétriques ont reçu beaucoup d'attention. Une revue détaillée de la littérature sur ce sujet dépassant le cadre de cette section, on se concentre seulement sur la discussion des résultats existants qui sont très liés au travail présent. Le but ici est de souligner les points communs et les différences les plus importantes avec la littérature existante.

Remarquons que la majeure partie de l'inférence statistique pour les tests d'hypothèses nonparamétriques a été développée pour le modèle de bruit blanc gaussien (BBG) et sa formulation équivalente comme modèle de suite gaussienne (GSM). Comme références récentes pour le problème de test d'une hypothèse simple dans ces modèles, on cite [28, 52], où le lecteur peut trouver des références supplémentaires vers des travaux antérieurs. Ici, l'hypothèse nulle définie par (3.5) est composite et nonparamétrique. Des références anciennes concernant les résultats minimax avec des hypothèses nulles composites incluent [45, 73, 40, 39], où le cas d'une hypothèse paramétrique nulle est le cas principal. Ces articles considèrent le cas unidimensionnel et fournissent seulement les taux minimax de test sans atteindre la constante de séparation exacte. De plus, l'alternative est définie comme l'ensemble des fonctions qui sont à une distance euclidienne d'au moins ρ de l'hypothèse nulle, ce qui est très différent des alternatives considérées ici.

Plus récemment, l'approche nonasymptotique des tests minimax a gagné en popularité [6, 7, 60, 61]. Un des avantages de l'approche nonasymptotique est qu'il n'y a pas de frontière claire entre les concepts d'hypothèses paramétriques ou nonparamétriques, tandis que ses limitations sont qu'il n'y a pas de résultat sur l'optimalité exacte (cette notion elle-même n'est pas bien définie). Remarquons que tous ces articles traitent du GSM et considèrent comme principale application le cas des signaux unidimensionnels, contrairement à notre cadre de régression en grande dimension.

Examinons plus précisément les articles [50] et [60] qui sont très proches de notre travail que ce soit par la méthodologie utilisée ou par le problème considéré. [50] a étendu certains résultats concernant les tests d'ajustement (goodness-of-fit) pour le modèle BBG en dimension d aux tests d'ajustement pour le modèle de régression nonparamétrique multidimensionnel. Plus précisément, ils ont testé l'hypothèse nulle $H_0 : f = f_0$, où f_0 est une fonction connue, contre l'alternative $H_1 : f \in \Sigma, \int_\Delta (f - f_0)^2 \geq r_n^2$, où Σ est un ellipsoïde dans l'espace de Hilbert $L_2(\Delta)$ par rapport au produit tensoriel de la base de Fourier (avec des extensions à d'autres bases). Ils ont obtenu à la fois le taux minimax et les asymptotiques exactes pour les probabilités d'erreur dans le cadre minimax. Donc le modèle qu'ils considèrent est le même que celui qui nous intéresse ici, mais les hypothèses H_0 et H_1 sont substantiellement différentes. En conséquence, la procédure de test que l'on propose prend en compte les formes générales de H_0 et H_1 données par (3.5) et est différente du test asymptotiquement minimax de [50]. De plus, on relâche substantiellement l'hypothèse sur la distribution du bruit en remplaçant l'hypothèse de Gaussianité par la la bornitude du 4ème moment.

Laurent et al. [60] ont considéré le BBG du point de vue du problème inverse, *i.e.*, quand le signal qui nous intéresse g subit une transformation linéaire T avant d'être observé dans un environnement bruité. Ceci correspond à $f = T[g]$ avec un opérateur compact injectif T. Alors les deux assertions $g = 0$ et $T[g] = 0$ sont équivalentes. En conséquence, si le but est de détecter le signal f, on peut considérer les deux problèmes de test suivants :

1. (formulation inverse) $H_0 : T^{-1}[f] = 0$ contre $H_1 : \|T^{-1}[f]\|_2 \geq \rho$.
2. (formulation directe) $H_0 : f = 0$ contre $H_1 : \|f\|_2 \geq \rho$.

Les auteurs ont discuté des avantages et des limitations de chacune de ces deux formulations en terme de taux minimax. Selon la complexité du problème inverse et les hypothèses sur la fonction à détecter (sparsité ou régularité), ils ont prouvé que le traitement spécifique consacré au problème inverse, qui inclut une inversion sous-jacente de l'opérateur, peut dégrader la précision de la détection. Pour chaque situation, ils ont aussi mis en évidence les cas où la stratégie directe échoue tandis qu'un test spécifique pour la formulation du problème inverse fonctionne bien. La formulation inverse est très liée à notre définition (3.5) des hypothèses H_0 et H_1, puisque $Q[f] = \|T^{-1}[f]\|_2^2$ est une fonctionnelle quadratique. Cependant, notre cadre est plus général en ce qu'il considère des fonctionnelles avec des noyaux non triviaux et des entrées possiblement négatives.

3.2 Tests minimax pour les fonctionnelles quadratiques diagonales

3.2.1 Notations supplémentaires

Dans ce qui suit, la notation $A_n = O(B_n)$ signifie qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $A_n \leq cB_n$ et la notation $A_n = o(B_n)$ signifie que le rapport A_n/B_n tend vers zéro. La relation $A_n \sim B_n$ signifie que A_n/B_n tend vers 1, tandis que la relation $A_n \asymp B_n$ signifie

qu'il existe des constantes $0 < c_1 < c_2 < \infty$ et n_0 assez grand tels que $c_1 \leq A_n/B_n \leq c_2$ pour $n \geq n_0$. Pour un nombre réel c, on note c_+ sa partie positive $\max(0, c)$ et $\lfloor c \rfloor$ sa partie entière. $\mathbf{1}_A$ représente la fonction indicatrice d'un ensemble A. Pour une fonction f et pour $q > 0$, on utilise aussi la notation $\|f\|_q = \left(\int_\Delta |f(t)|^q dt\right)^{1/q}$. On note $\|\mathbf{u}\|_0$ le nombre d'éléments non nuls d'un tableau $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{\mathcal{L}}$. Pour un ensemble $\mathcal{A}$, $|\mathcal{A}|$ représente son cardinal.

Rappelons que l'on considère des fonctionnelles quadratiques Q de la forme $Q[f] = \sum_{l\in\mathcal{L}} q_l \theta_l[f]^2$, pour un tableau donné $\mathbf{q} = \{q_l\}_{l\in\mathcal{L}}$. La principale différence entre la fonctionnelle $\sum_{l\in\mathcal{L}} \theta_l[f]^2$ qui apparaît dans le problème de détection [50**?**] et cette fonctionnelle générale est que le support de $\mathbf{q}$ défini par $S_Q = \text{supp}(\mathbf{q}) = \{l \in \mathcal{L} : q_l \neq 0\}$ est généralement différent de $\mathcal{L}$. De plus, de grands coefficients q_l amplifient l'erreur d'estimation de $Q[f]$ et donc, il devient plus difficile de distinguer H_0 de H_1. Une question intéressante, à laquelle on répond dans la prochaine section, est quelles sont les conditions sur la paire $\mathbf{c}$ et $\mathbf{q}$ qui rendent possible la distinction entre l'hypothèse nulle et l'alternative.

Soit S_Q^c le complémentaire de S_Q et, pour un ensemble $L \subset \mathcal{L}$, $\text{span}(\{\varphi_l\}_{l\in L})$ le sous-espace vectoriel fermé de $L_2(\Delta)$ engendré par l'ensemble $\{\varphi_l\}_{l\in L}$. Soit $\Pi_{S_Q} f$ et $\Pi_{S_Q^c} f$ les projections orthogonales d'une fonction $f \in \Sigma$ sur $\text{span}(\{\varphi_l\}_{l\in S_Q})$ et $\text{span}(\{\varphi_l\}_{l\in S_Q^c})$ respectivement. Pour simplifier les notations, l'indice S_Q^c est omis dans le reste du chapitre, *i.e.*, $\Pi_{S_Q^c} f$ est remplacé par Πf. Finalement, tout le long de ce travail, on va supposer que f est centré, *i.e.*, $\int_\Delta f(\mathbf{t})\, d\mathbf{t} = 0$, et que $\{\varphi_l\}$ est une base orthonormale du sous-espace des fonctions centrées de $L_2(\Delta)$. Autrement dit, toutes les fonctions φ_l sont orthogonales à la fonction constante.

3.2.2 U-tests linéaires et leur taux d'erreur

On commence par l'introduction d'une famille de procédures de test que l'on va appeler U-tests linéaires. Pour cela, on sépare l'échantillon en deux parties : une petite partie de l'échantillon est utilisée pour fabriquer un estimateur pilote $\widehat{\Pi f}_n$ de Πf, tandis que les observations restantes sont utilisées pour distinguer H_0 de H_1. Posons $m = n - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ et appelons les deux parties de l'échantillon $\mathcal{D}_1 = \{(x_i, \mathbf{t}_i) : i = 1, \ldots, m\}$ et $\mathcal{D}_2 = \{(x_i, \mathbf{t}_i) : i = m+1, \ldots, n\}$. En utilisant l'estimateur pilote de Πf, on définit les observations ajustées $\tilde{x}_i = x_i - \widehat{\Pi f}_n(\mathbf{t}_i)$ et $\tilde{\boldsymbol{z}}_i = (\tilde{x}_i, \mathbf{t}_i)$.

Définition 3.1. Soit $\mathbf{w}_n = \{w_{l,n}\}_{l\in S_Q}$ un tableau de nombres réels contenant un nombre fini d'éléments non nuls et tel que $\|\mathbf{w}_n\|_2 = 1$. Soit u un nombre réel. On appelle U-test linéaire basé sur le tableau $\mathbf{w}_n$ la procédure $\phi_n^{\mathbf{w}} = \mathbf{1}_{\{U_n^{\mathbf{w}} > u\}}$, où $U_n^{\mathbf{w}}$ est la U-statistique linéaire en $\mathbf{w}_n$ définie par

$$U_n^{\mathbf{w}} = \left(\frac{2}{m(m-1)}\right)^{1/2} \sum_{1\leq i<j\leq m} \tilde{x}_i \tilde{x}_j \sum_{l\in S_Q} w_{l,n} \varphi_l(\mathbf{t}_i) \varphi_l(\mathbf{t}_j). \tag{3.9}$$

On va prouver qu'un choix approprié de $\mathbf{w}_n$ et u mène à un U-test linéaire qui est asymptotiquement minimax optimal exact. La logique derrière cette propriété est que

l'on lisse les hautes fréquences d'un signal bruité. En fait, si on appelle $\{\theta_l[f]\}_{l\in S_Q}$ la (partie significative de la) représentation de f dans le domaine des fréquences, alors $\{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \tilde{x}_i\varphi_l(\mathbf{t}_i)\}_{l\in S_Q}$ est un estimateur presque sans biais de cette représentation. Alors, le tableau $\mathbf{w}_n$ agit comme un filtre passe-bas qui réduit à zéro les coefficients correspondant aux hautes fréquences de façon à empêcher l'over-fitting.

La première étape avant d'établir la garantie théorique sur le taux d'erreur d'un U-test linéaire consiste à explorer le comportement de la statistique $U_n^{\mathbf{w}}$ sous l'hypothèse nulle.

Proposition 3.2. *Soit $w_{n,l} \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $l \in \mathcal{L}$. On suppose que $E[\xi_1^4] < \infty$ et que les conditions suivantes sont remplies :*

- *Pour un certain $C_w < \infty$, $\|\mathbf{w}_n\|_\infty^2\|\mathbf{w}_n\|_0 \leq C_w$.*
- *Quand $n \to \infty$, $\|\mathbf{w}_n\|_0 \to \infty$ avec $\|\mathbf{w}_n\|_0 = o(n)$.*
- *Pour un certain $C_\varphi < \infty$, $\sup_{\mathbf{t}\in\Delta}\sum_{l:w_{l,n}\neq 0}\varphi_l^2(\mathbf{t}) \leq C_\varphi\|\mathbf{w}_n\|_0$.*
- *Quand $n \to \infty$, $\sup_{f\in\Sigma} E_f[\|\Pi f - \widehat{\Pi f}_n\|_4^4] = o(1)$.*

Alors, uniformément en $f \in \mathcal{F}_0$, la U-statistique définie par (3.9) converge en loi vers la distibution gaussienne standard $\mathcal{N}(0,1)$.

Autrement dit, cette proposition affirme que sous des conditions appropriées, pour tout $u \in \mathbb{R}$, la suite $\sup_{f\in\mathcal{F}_0}|P_f(U_n^{\mathbf{w}} > u) - \Phi(u)|$ tend vers zéro, quand n tend vers l'infini. Ceci signifie que sous l'hypothèse nulle, asymptotiquement, la distribution de la statistique de test $U_n^{\mathbf{w}}$ ne dépend pas des paramètres. Ce phénomène est souvent appelé le phénomène de Wilks.

Pour achever l'étude du taux d'erreur d'un U-test linéaire, on a besoin de caractériser le comportement de la statistique de test U_n sous l'hypothèse alternative. Comme d'habitude, cette étape est plus difficile. En gros, on va montrer que sous l'hypothèse alternative, la statistique de test U_n est proche d'une variable gaussienne de moyenne $h_n[f,\mathbf{w}_n] = (\frac{m(m-1)}{2})^{1/2}\sum_{l\in\mathcal{L}(\mathbf{w}_n)} w_{l,n}\theta_l^2[f]$ et de variance 1. La prochaine proposition fournit un énoncé rigoureux de ceci.

Proposition 3.3. *Supposons que les hypothèses de la Proposition 3.2 sont satisfaites. Supposons en plus que :*

- *Il existe une suite ζ_n telle que $\zeta_n^{-1} = o(n)$ et $\sup_{l\in S_Q:w_{l,n}<\zeta_n} c_l^{-1} = o(1)$.*
- *Pour un certain $p > 4$, on a $\sup_{f\in\Sigma}\|\Pi_{S_Q} f\|_p < \infty$.*

Alors, pour tout $\rho > 0$, l'erreur de seconde espèce du U-test linéaire basé sur $\mathbf{w}_n$ satisfait :

$$\sup_{f\in\mathcal{F}_1(\rho)} P_f(\phi_n^{\mathbf{w}} = 0) \leq \sup_{f\in\mathcal{F}_1(\rho)} \Phi(u - h_n[f,\mathbf{w}_n]) + o(1), \tag{3.10}$$

où le terme $o(1)$ ne dépend pas de ρ.

On mène maintenant une discussion informelle sur les hypothèses introduites dans les propositions précédentes. Les deux premières hypothèses de la Proposition 3.2 signifient que la plupart des éléments non nuls du tableau $\mathbf{w}_n$ devraient être du même ordre. Les

tableaux qui ont quelques pics et beaucoup de petits éléments sont éliminés par cette hypothèse. De plus, le nombre de fréquences qui ne sont pas annulées par $\mathbf{w}_n$ devrait être petit comparé à la taille de l'échantillon n. La troisième hypothèse de la Proposition 3.2 est trivialement satisfaite pour des bases de fonctions bornées telles que les bases trigonométriques et leurs produit tensoriels. Pour les bases localisées comme les bases d'ondelettes, cette hypothèse impose une contrainte sur la taille du support de $\mathbf{w}_n$: celui-ci ne doit pas être trop petit. On va parler de la dernière hypothèse de la Proposition 3.2 en détail plus loin. Remarquons que la seule raison d'exiger que les fonctions f soient lisses sous l'hypothèse nulle est d'être capable de construire un estimateur pilote uniformément consistant de Πf.

Concernant les hypothèses imposées dans la Proposition 3.3, la première signifie que seuls les coefficients θ_l correspondant aux hautes fréquences sont fortement réduits par $\mathbf{w}_n$. Ceci est une sorte d'hypothèse de cohérence entre le filtre de lissage $\mathbf{w}_n$ et les coefficients $\mathbf{c} = \{c_l\}_{l\in\mathcal{L}}$ caractérisant l'information a priori sur la régularité du signal. La seconde hypothèse de la Proposition 3.3 est assez faible et habituelle dans le contexte de la régression avec un design aléatoire. Elle est seulement nécessaire pour obtenir un contrôle uniforme du taux d'erreur et la valeur réelle de la norme $\|\Pi_{S_Q} f\|_p$ n'entre en aucune manière dans la définition de la procédure de test.

Tirons les conséquences des propositions précédentes sur le taux d'erreur cumulée du U-test linéaire. En utilisant la monotonie de la fonction de répartition gaussienne Φ, sous les hypothèses de la Proposition 3.3, on obtient

$$\gamma_n(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1(\rho), \phi_n^{\mathbf{w}}) \leq \Phi(-u) + \Phi\Big(u - \inf_{f\in\mathcal{F}_1(\rho)} h_n[f, \mathbf{w}_n]\Big) + o(1), \tag{3.11}$$

où le terme $o(1)$ est uniforme en $\rho > 0$ et en $u \in \mathbb{R}$. En utilisant la symétrie et la monotonie de Φ' sur $\mathbb{R}_+$, on vérifie aisément que la valeur du seuil u minimisant le terme principal du côté droit de la dernière inégalité est $u = \frac{1}{2}\inf_{f\in\mathcal{F}_1(\rho)} h_n[f, \mathbf{w}_n]$. Ce résultat fournit un outil constructif pour déternminer le taux de séparation d'un U-test linéaire. En fait, on a seulement besoin de poser $u = z_{1-\gamma/2}$ et de trouver une suite r_n telle que $\inf_{f\in\mathcal{F}_1(r_n)} h_n[f, \mathbf{w}_n] \sim 2z_{1-\gamma/2}$, où z_α est le α-quantile de $\mathcal{N}(0, 1)$.

Remarque 3.4. On explique ici l'utilisation de $\tilde{x}_i$ au lieu de x_i dans notre procédure de test. En fait, si on s'intéresse uniquement à l'optimalité en taux, cette précaution n'est pas nécessaire. Le problème apparaît seulement quand on traite de l'optimalité exacte et cela concerne la variance de U_n. En effet on a besoin que certains termes qui apparaissent dans la variance tendent vers zéro quand $Q[f] = 0$ ou $Q[f]$ est petit (pour l'optimalité en taux la bornitude des termes précités est suffisante). Si on avait utilisé x_i au lieu de $\tilde{x}_i$, on aurait obtenu des termes comme $\|f\|_2$ dans la variance. L'information contenue dans l'assertion "$Q[f]$ est petit" concerne seulement les coefficients $\{\theta_l\}_{l\in S_Q}$, ainsi cette assertion implique que $\|\Pi_{S_Q} f\|_2$ est petit mais ne dit rien concernant $\|f\|_2$. On peut aussi remarquer que ce problème ne se pose pas dans le modèle de suite gaussienne étant donné qu'on estime θ_l^2 par un estimateur sans biais dont la variance fait seulement apparaître θ_l.

Remarque 3.5. On a choisi de considérer seulement le critère $\gamma_n(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1(\rho), \phi_n^{\mathbf{w}})$ de façon à simplifier l'exposé des résultats. Mais on aurait pu traiter le cas classique du critère de Neyman-Pearson que l'on rappelle ici. Pour un seuil $0 < \alpha < 1$ et un test ψ, on pose

$$\alpha(\mathcal{F}_0, \psi) = \sup_{f \in \mathcal{F}_0} P_f(\psi = 1), \quad \beta(\mathcal{F}_1, \psi) = \inf_\psi \sup_{f \in \mathcal{F}_1} P_f(\psi = 0),$$

Au lieu du risque minimax $\gamma_n(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1(\rho))$ on aurait pu considérer la quantité $\beta_n(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1(\rho)) = \inf_{\psi:\alpha(\mathcal{F}_0,\psi)\leq\alpha} \beta(\mathcal{F}_1(\rho), \psi)$. Ce critère est considéré dans [50] et plus généralement dans [51]. La transposition à notre cas est immédiate.

3.2.3 U-tests linéaires minimax

La relation (3.11) étant valide pour une grande variété de tableaux $\mathbf{w}_n$, il est naturel de chercher un $\mathbf{w}_n$ minimisant le côté droit de (3.11). Ceci mène au problème de point-selle suivant :

$$\sup_{\substack{\mathbf{w}\in\mathbb{R}_+^{\mathcal{L}} \\ \|\mathbf{w}\|_2=1}} \inf_{f\in\mathcal{F}_1(\rho)} \sum_{l\in\mathcal{L}} w_l \theta_l[f]^2 = \sup_{\substack{\mathbf{w}\in\mathbb{R}_+^{\mathcal{L}} \\ \|\mathbf{w}\|_2=1}} \inf_{\substack{\mathbf{v}\in\mathbb{R}_+^{\mathcal{L}} \\ \langle \mathbf{v},\mathbf{c}\rangle\leq 1, \langle \mathbf{v},\mathbf{q}\rangle\geq\rho^2}} \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}\rangle. \tag{3.12}$$

Il s'avère que ce problème de point-selle peut être résolu par rapport à $\mathbf{w}$ et mène à une famille de filtres de lissage $\mathbf{w}$ à un paramètre.

Proposition 3.6. *Supposons que pour tout $T > 0$, l'ensemble $\mathcal{N}(T) = \{l \in S_Q : c_l < T q_l\}$ est fini. Pour un $\rho > 0$ donné, supposons que l'équation*

$$\frac{\sum_{l\in\mathcal{L}} q_l (T q_l - c_l)_+}{\sum_{l\in\mathcal{L}} c_l (T q_l - c_l)_+} = \rho^2 \tag{3.13}$$

a une solution que l'on la note T_ρ. Alors, la paire $(\mathbf{w}^*, \mathbf{v}^*)$ définie par

$$v_l^* = \frac{(T_\rho q_l - c_l)_+}{\sum_{l\in\mathcal{L}} c_l (T_\rho q_l - c_l)_+} \qquad w_l^* = \frac{v_l^*}{\|\mathbf{v}^*\|_2} \tag{3.14}$$

fournit une solution au problème de point-selle (3.12), c'est-à-dire

$$\langle \mathbf{w}^*, \mathbf{v}^*\rangle = \sup_{\substack{\mathbf{w}\in\mathbb{R}_+^{\mathcal{L}} \\ \|\mathbf{w}\|_2=1}} \inf_{\substack{\mathbf{v}\in\mathbb{R}_+^{\mathcal{L}} \\ \langle \mathbf{v},\mathbf{c}\rangle\leq 1, \langle \mathbf{v},\mathbf{q}\rangle\geq\rho^2}} \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}\rangle = \inf_{\substack{\mathbf{v}\in\mathbb{R}_+^{\mathcal{L}} \\ \langle \mathbf{v},\mathbf{c}\rangle\leq 1, \langle \mathbf{v},\mathbf{q}\rangle\geq\rho^2}} \langle \mathbf{w}^*, \mathbf{v}\rangle.$$

Ce résultat nous dit que les poids "optimaux" $\mathbf{w}_n$ pour le U-test linéaire $\phi_n^{\mathbf{w}}$ devraient être de la forme (3.14), ce qui est particulièrement intéressant à cause de la dépendance à un seul paramètre $T > 0$. Le prochain théorème fournit une stratégie simple pour déterminer le test minimax optimal exact parmi les U-tests linéaires satisfaisant certaines hypothèses faibles. On montrera plus tard dans cette section que ce test est en fait minimax optimal exact parmi tous les tests possibles.

Théorème 3.7. *Supposons que* $E[\xi_1^4] < \infty$ *et que pour tout* $T > 0$, *l'ensemble* $\mathcal{N}(T) = \{l \in S_Q : c_l < Tq_l\}$ *est fini. Pour un seuil donné* $\gamma \in (0,1)$, *soit* $T_{n,\gamma}$ *une suite de nombres positifs tels que la relation suivante soit satisfaite : quand* $n \to \infty$,

$$\Big(\frac{m(m-1)}{2}\sum_{l\in\mathcal{L}}(T_{n,\gamma}q_l - c_l)_+^2\Big)^{1/2} = \Big(\sum_{l\in\mathcal{L}} c_l(T_{n,\gamma}q_l - c_l)_+\Big)(2z_{1-\gamma/2} + o(1)). \tag{3.15}$$

Définissons

$$r^*_{n,\gamma} = \Big\{\frac{\sum_{l\in\mathcal{L}} q_l(T_{n,\gamma}q_l - c_l)_+}{\sum_{l\in\mathcal{L}} c_l(T_{n,\gamma}q_l - c_l)_+}\Big\}^{1/2}. \tag{3.16}$$

Si les conditions suivantes sont remplies :

[C1] *Pour une constante* $C_1 > 0$,

$$|\mathcal{N}(T_{n,\gamma})| \max_{l\in\mathcal{N}(T_{n,\gamma})} q_l^2 \le C_1 \sum_{l\in\mathcal{N}(T_{n,\gamma})} (q_l - \frac{c_l}{T_{n,\gamma}})^2.$$

[C2] *Quand* $n \to \infty$, $\sum_{l\in\mathcal{N}(T_{n,\gamma})} q_l^2 = o(n^2 \min_{l\in\mathcal{N}(T_{n,\gamma})} q_l^2)$.

[C3] *Pour une constante* $C_3 > 0$, $\sup_{\mathbf{t}\in\Delta} \sum_{l\in\mathcal{N}(T_{n,\gamma})} \varphi_l^2(\mathbf{t}) \le C_3|\mathcal{N}(T_{n,\gamma})|$.

[C4] *Quand* $n \to \infty$, $|\mathcal{N}(T_{n,\gamma})| \to \infty$ *avec* $|\mathcal{N}(T_{n,\gamma})| = o(n)$.

[C5] *Quand* $n \to \infty$, $T_{n,\gamma} \inf_{l\in S_Q} q_l$ *tend vers* $+\infty$.

[C6] *Quand* $n \to \infty$, $\sup_{f\in\Sigma} E_f[\|\Pi f - \widehat{\Pi f}_n\|_4^4] = o(1)$ *et* $\widehat{\Pi f}_n \in$ *span*$(\{\varphi_l\}_{l\in S_Q^c})$

[C7] *Pour un certain* $p > 4$, *on a* $\sup_{f\in\Sigma} \|\Pi_{S_Q} f\|_p < \infty$.

alors le U-test linéaire $\widehat{\phi}_n^* = \mathbf{1}_{\{U_n^{\widehat{\mathbf{w}}^*} > z_{1-\gamma/2}\}}$ *basé sur le tableau* $\widehat{\mathbf{w}}_n^*$ *défini par*

$$\widehat{w}^*_{l,n} = \frac{(T_{n,\gamma}q_l - c_l)_+}{\big[\sum_{l'\in\mathcal{L}}(T_{n,\gamma}q_{l'} - c_{l'})_+^2\big]^{1/2}}$$

satisfait

$$\gamma_n(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1(r^*_{n,\gamma}), \widehat{\phi}_n^*) \le \gamma + o(1), \qquad \textit{quand} \qquad n \to \infty. \tag{3.17}$$

La preuve de ce résultat, fournie dans la Section 3.2, est une conséquence directe des Propositions 3.2, 3.3 and 3.6. Comme on va le voir ci-dessous, le taux $r^*_{n,\gamma}$ défini dans le Théorème 3.7 est le taux minimax optimal exact dans le problème de test des hypothèses (3.5), pourvu que les hypothèses du théorème sont satisfaites. Comme on s'y attendait, obtenir un tel résultat exige des hypothèses non triviales sur la nature de la classe fonctionnelle, des hypothèses à tester, de même que sur les interactions entre celles-ci. On fait quelques commentaires sur ces hypothèses dans la remarque ci-dessous, avec un développement supplémentaire dans les sections suivantes.

Remarque 3.8. La toute première hypothèse est que l'ensemble $\mathcal{N}(T)$ est fini. Elle est nécessaire pour assurer que le U-test linéaire introduit est calculable. Cette hypothèse est satisfaite quand, en gros, les coefficients qui expriment la régularité, $\{c_l\}_{l\in\mathcal{L}}$, augmentent plus vite que les coefficients $\{q_l\}_{l\in\mathcal{L}}$ de la fonctionnelle quadratique Q. Les hypothèses

[C1], **[C2]**, **[C4]** et **[C5]** sont satisfaites dans la plupart des cas auxquels on s'intéresse. Deux exemples—concernant les ellipsoïdes de Sobolev avec des fonctionnelles quadratiques liées aux dérivées partielles—pour lesquelles ces hypothèses sont satisfaites sont présentées dans les Sous-sections 3.3.3 et 3.3.4. L'hypothèse **[C3]** est essentiellement une contrainte sur la base $\{\varphi_l\}$; on montre dans la Sous-section 3.3.1 qu'elle est satisfaite par beaucoup de bases communément utilisées dans la littérature statistique. **[C6]** et **[C7]** sont liées à des difficultés techniques supplémentaires dans le modèle de régression, qui nous forcent à imposer plus de régularité que dans le modèle de suite gaussienne.

3.2.4 Borne inférieure

On va énoncer dans cette section le résultat montrant que le taux $r^*_{n,\gamma}$ introduit dans le Théorème 3.7 est le taux minimax de test et que la constante de séparation exacte associée à ce taux est égale à un. Ceci implique aussi que la procédure de test proposée dans la sous-section précédente est non seulement optimale en taux mais aussi minimax optimale exacte parmi toutes les procédures de test possibles. Dans cette sous-section, on considère les classes fonctionnelles $\Sigma = \Sigma_{p,L}$ définies par

$$\Sigma_{p,L} = \Big\{ f = \sum\nolimits_{l\in\mathcal{L}} \theta_l[f]\varphi_l : \ \sum\nolimits_{l\in\mathcal{L}} c_l \theta_l[f]^2 \le 1, \ \|f\|_p \le L, \ \Pi_{S_Q^c} f = 0 \Big\}.$$

Clairement, pour $p > 4$, ces classes fonctionnelles sont plus petites que celles satisfaisant les conditions du Théorème 3.7. Ainsi, toute borne inférieure prouvée pour ces classes fonctionnelles va aussi être une borne inférieure pour les classes fonctionnelles auxquelles le Théorème 3.7 s'applique.

Théorème 3.9. *Supposons que les ξ_i sont des variables aléatoires gaussiennes standard et que pour tout $T > 0$, l'ensemble $\mathcal{N}(T) = \{l \in S_Q : c_l < Tq_l\}$ est fini. Pour un seuil donné $\gamma \in (0,1)$, soit $T_{n,\gamma}$ et $r^*_{n,\gamma}$ comme dans le Théorème 3.7. Si les conditions* **[C1]**, **[C3]** *et*

[C8] *quand $n \to \infty$, $|\mathcal{N}(T_{n,\gamma})| \to \infty$ avec $|\mathcal{N}(T_{n,\gamma})| \log(|\mathcal{N}(T_{n,\gamma})|) = o(n)$,*

[C9] *quand $n \to \infty$, $\max_{l\in\mathcal{N}(T_{n,\gamma})} c_l = o(n|\mathcal{N}(T_{n,\gamma})|^{1/2})$,*

sont satisfaites, alors pour tout $C < 1$ le risque minimax satisfait

$$\gamma_n(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1(Cr^*_{n,\gamma})) \ge \gamma + o(1), \qquad as \qquad n \to \infty. \tag{3.18}$$

Bien que les principales étapes de la preuve de ce théorème, reportées en Section 3.2, sont celles de [50], on a apporté plusieurs améliorations qui ont donné une preuve plus courte et plus transparente et des hypothèses plus faibles. L'amélioration la plus notable est peut-être le fait que pour la condition **[C3]** il n'est plus nécessaire d'avoir $C_3 = 1$. On discute un peu plus ce point et d'autres hypothèses dans la prochaine section.

Remarque 3.10. Si on s'intéresse seulement à l'optimalité en taux, on aurait pu utiliser une loi a priori plus simple dans la preuve du Théorème 3.9 qui aurait aussi donné la

borne inférieure désirée sous des hypothèses légèrement plus faibles. On peut déduire de cette preuve que pour une paire concrète $(\mathbf{c}, \mathbf{q})$, un moyen simple de trouver le taux minimax consiste à résoudre par rapport à r_n la relation $n(r_n)^2 \asymp M(r_n^{-2})^{1/2}$, où $M(T) = \sum_{l \in \mathcal{N}(T)} q_l^2$.

3.3 Exemples

3.3.1 Bases satisfaisant l'hypothèse [C3]

D'abord on donne des exemples de bases othonormales satisfaisant l'hypothèse **[C3]**, indépendamment de la nature des tableaux **c** et **q** définissant la classe de régularité et la fonctionnelle quadratique Q. On peut remarquer qu'en dépit du cadre plus général considéré dans ce travail, notre hypothèse **[C3]** est significativement plus faible que l'hypothèse correspondante dans [50], qui requiert que C_3 soit égal à un. En fait, dans une remarque, Ingster et Sapatinas [50] suggèrent que leur preuve reste valide sous notre hypothèse **[C3]** si l'hypothèse **[C4]** est renforcée en $|\mathcal{N}(T_{n,\gamma})| = o(n^{2/3})$. Grâce à une meilleure analyse, nous avons réussi à établir des asymptotiques exactes sous la version plus faible **[C3]** sans coût supplémentaire (excepté un facteur logarithmique qui apparaît maintenant dans la condition correspondante dans le Théorème 3.9).

Base de Fourier Considérons d'abord la base de Fourier (2.1) définie dans le Chapitre 2. Puisque toutes les fonctions de la base sont bornées par $\sqrt{2}$, **[C3]** est évidemment satisfaite avec $C_3 = 2$. De plus, si l'ensemble $\mathcal{N}(T)$ est symétrique, *i.e.*, $\boldsymbol{k} \in \mathcal{N}(T)$ implique $-\boldsymbol{k} \in \mathcal{N}(T)$, alors **[C3]** est satisfaite avec $C_3 = 1$.

Produit tensoriel de la base de Fourier On peut aussi considérer le produit tensoriel traditionnel de la base de Fourier comme dans [50]. **[C3]** est alors évidemment satisfaite avec $C_3 = 2^d$. De plus, si l'ensemble $\mathcal{N}(T)$ est orthosymétrique, *i.e.*, $(k_1, \dots, k_d) \in \mathcal{N}(T)$ implique $(\pm k_1, \dots, \pm k_d) \in \mathcal{N}(T)$, alors **[C3]** est satisfaite avec $C_3 = 1$.

Base de Haar Soit $\{\varphi_{j,k}(\cdot), j \in \mathbb{N}, k \in \{1, \dots, 2^j\}\}$, la base de Haar orthonormale standard sur $[0, 1]$, où j est le facteur d'échelle et k le facteur de localisation. Le produit tensoriel $(\varphi_{\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}})_{\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}}$ de la base de Haar est alors

$$\varphi_{\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}} = \prod_{i=1}^{d} \varphi_{j_i,k_i},$$

où $\boldsymbol{j} = (j_1, \dots, j_d)$ et $\boldsymbol{k} = (k_1, \dots, k_d)$. Comme il est montré dans [50], sous l'hypothèse supplémentaire que les coefficients $c_l = c_{\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}}$ et $q_l = q_{\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}}$ dépendent seulement du facteur d'échelle, *i.e.*, $c_{\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}} = c_{\boldsymbol{j}}$ et $q_{\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}} = q_{\boldsymbol{j}}$, l'hypothèse [C3] est satisfaite avec $C_3 = 1$. Remarquons que la même chose est vraie pour la base de Haar définie de manière plus habituelle comme dans la Section 2.8 du chapitre 2.

Base d'ondelettes à support compact Puisque nous ne somme pas limités au cas $C_3 = 1$, toute base orthonormale d'ondelettes satisfait **[C3]**, tant que les ondelettes sont à support compact et pourvu que les coefficients c_l et q_l dépendent du niveau de résolution et pas du facteur de localisation.

3.3.2 Exemples d'estimateurs satisfaisant [C6]

On présente ci-dessous des estimateurs pilotes qui satisfont dans deux contextes différents l'hypothèse **[C6]**.

Produit tensoriel de la base de Fourier Pour le premier exemple, on suppose que le système orthonormal $\{\varphi_l\}$ est le produit tensoriel de la base de Fourier. Alors on a $\sup_l \sup_{t\in\Delta} |\varphi_l(t)| \leq 2^{d/2}$. La boule de Sobolev anisotrope de rayon R et de régularité $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_d) \in (0,\infty)^d$ est définie par

$$W_2^{\boldsymbol{\sigma}}(R) = \Big\{ f : \sum\nolimits_{\boldsymbol{l}\in\mathbb{Z}^d} \sum\nolimits_{i=1}^{d} (2\pi l_i)^{2\sigma_i} \theta_{\boldsymbol{l}}[f]^2 \leq R \Big\}.$$

L'estimateur que l'on suggère d'utiliser est construit comme suit. On estime d'abord $\theta_l[f]$ par $\widehat{\theta}_l = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i \varphi_l(\mathbf{t}_i)$. Ensuite on choisit un paramètre $T = T_n > 0$ et on définit l'estimateur pilote

$$\widehat{\Pi f}_n = \sum_{l\in S_Q^c : c_l < T} \widehat{\theta}_l \varphi_l. \tag{3.19}$$

Pour simplifier les notations, on pose $\mathcal{N}_1(T) = \{l \in S_Q^c : c_l < T\}$ et $\mathcal{N}_2(T) = S_Q^c \setminus \mathcal{N}_1(T)$.

Lemme 3.11. *Supposons que l'une ou l'autre des conditions suivantes est satisfaite :*

- $\mathbf{c}$ *satisfait la condition* $\sum_l c_l^{-1} < \infty$,
- $\Sigma \subset W_2^{\boldsymbol{\sigma}}(R)$ *pour un certain* $R > 0$ *et pour* $\boldsymbol{\sigma} \in (0,\infty)^d$ *tel que* $\bar{\sigma} = (\frac{1}{d}\sum_i \frac{1}{\sigma_i})^{-1} > d/4$.

Si $T = T_n \to \infty$ *avec* $|\mathcal{N}_1(T)| = o(n^{1/2})$, *alors* $\widehat{\Pi f}_n$ *défini par (3.19) satisfait* **[C6]**.

Base d'ondelettes orthonormale à support compact La même méthode peut être appliquée dans le cas d'une base orthonormale d'ondelettes à supports compacts de $L_2[0,1]^d$. On suppose que les coefficients $c_l = c_{j,\boldsymbol{k}}$ correspondent à ceux d'une boule de Besov $B^s_{2,2}$, *i.e.*, $c_j = 2^{js}$, et que $\sigma = s - d/4 > 0$. Posons, pour $J \in \mathbb{N}$,

$$\widehat{\Pi f}_n = \sum\nolimits_{\boldsymbol{k}\in[1,2^J]^d : (J,k)\in S_Q^c} \widehat{\alpha}_{J,\boldsymbol{k}} \varphi_{J,\boldsymbol{k}} \quad \text{où} \quad \widehat{\alpha}_{J,\boldsymbol{k}} = \frac{1}{n}\sum\nolimits_{i=1}^n x_i \varphi_{J,\boldsymbol{k}}(\mathbf{t}_i).$$

Lemme 3.12. *Si* $J = J_n$ *tend vers l'infini tout en ayant* $2^{Jd} = o(n)$, *alors* $\sup_{f\in\Sigma} E_f \|\Pi f - \widehat{\Pi f}_n\|^4 \to 0$ *quand* $n \to \infty$.

Dans les deux Sous-sections suivantes, on applique les résultats précédents à deux exemples de fonctionnelles quadratiques faisant intervenir des dérivées. Le système orthonormal que l'on utilise est le produit tensoriel de la base de Fourier.

3.3.3 Tester des dérivées partielles

On suppose ici que f appartient à une classe de Sobolev avec des contraintes anisotropes et que la fonctionnelle quadratique Q correspond, en gros, à la norme L_2 au carré d'une dérivée partielle. Plus précisément, soit $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}_+^d$ et $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}_+^d$ deux vecteurs donnés et définissons, pour tout $\boldsymbol{l} \in \mathcal{L} = \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$,

$$q_{\boldsymbol{l}} = \prod_{j=1}^d (2\pi l_j)^{2\alpha_j}, \qquad \text{et} \qquad c_{\boldsymbol{l}} = \sum_{j=1}^d (2\pi l_j)^{2\sigma_j}.$$

On va supposer que $\sum_{j=1}^d (\alpha_j/\sigma_j) < 1$.

Pour une fonction $f = \sum_{l\in\mathcal{L}} \theta_l \varphi_l \in L_2(\Delta)$, on pose $\|f\|_{2,c}^2 = \sum_{l\in\mathcal{L}} c_l \theta_l^2$ et $\|f\|_{2,q}^2 = \sum_{l\in\mathcal{L}} q_l \theta_l^2$. Alors, si f est une fonction 1-périodique qui est suffisamment régulière, et si les α_j et les σ_j sont entiers, on a

$$\|f\|_{2,q}^2 = \|\partial^{\sum_j \alpha_j} f/\partial t_1^{\alpha_1} \dots \partial t_d^{\alpha_q}\|_2^2, \qquad \text{et} \qquad \|f\|_{2,c}^2 = \sum_{j=1}^d \|\partial^{\sigma_j} f/\partial t_j^{\sigma_j}\|_2^2.$$

Proposition 3.13. *Définissons δ, $\bar\sigma$, (κ_j) et κ par $\delta = \sum_{j=1}^d \alpha_j/\sigma_j$, $\frac{1}{\bar\sigma} = \frac{1}{d}\sum_{j=1}^d \frac{1}{\sigma_j}$, $\kappa_j = \frac{1}{2\sigma_j} + \frac{\alpha_j}{\sigma_j}\frac{4\bar\sigma+d}{2\bar\sigma(1-\delta)}$ et $\kappa = \sum_{j=1}^d \kappa_j$. Si $\delta < 1$ et $\bar\sigma > d/4$, alors le taux minimax exact $r_{n,\gamma}^*$ est donné par $r_{n,\gamma}^* = C_\gamma^* r_n^*(1+o(1))$, où le taux minimax r_n^* et la constante de séparation exacte sont*

$$r_n^* = n^{-\frac{2\bar\sigma(1-\delta)}{4\bar\sigma+d}}, \qquad \text{et} \qquad C_\gamma^* = \left(4z_{1-\gamma/2}^2 \kappa C(d,\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\alpha})\right)^{\frac{\bar\sigma(1-\delta)}{4\bar\sigma+d}} (1+2\kappa^{-1})^{\frac{2(1+\delta)\bar\sigma+d}{2(4\bar\sigma+d)}}$$

avec

$$C(d,\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\alpha}) = \pi^{-d} \frac{\prod_{i=1}^d \Gamma(\kappa_i)}{(\prod_{i=1}^d \sigma_i)(1-\delta)\Gamma(\kappa+2)}.$$

De plus, la suite de U-tests linéaires ϕ_n du Théorème 3.7 est asymptotiquement minimax avec $T_{n,\gamma} \sim (r_{n,\gamma}^*)^{-2}(1+2\kappa^{-1})$.

Remarque 3.14. Le résultat précédent peut être utilisé pour effectuer une réduction de dimension par sélection de variable. La coordonnée t_i de $\mathbf{t}$ est non significative si f est constante sur la droite $\{\mathbf{t} \in \Delta : t_j = a_j \text{ pour tout } j \neq i\}$, quelque soit le vecteur $\boldsymbol{a} \in \Delta$. Ceci implique que la $i^{ème}$ dérivée partielle de f est nulle. Ainsi, on peut tester la pertinence d'une variable, disons t_1, en comparant $\|\partial f/\partial t_1\|_2$ à 0. Dans nos notations, ceci revient à tester les hypothèses (3.5) avec $Q[f] = \|f\|_{2,\mathbf{q}}^2$ tel que $q_{\boldsymbol{l}} = (2\pi l_1)^2$. En combinant la Proposition 3.13 et le Théorème 3.7, on peut aisément déduire un test minimax optimal exact et les taux minimax optimaux exacts pour ce problème de sélection de variable.

Remarque 3.15. Un autre cas particulier intéressant du cadre décrit dans cette sous-section concerne le problème de l'identification de composante dans les modèles linéaires partiels [77]. On dit que f obéit à un modèle linéaire partiel si pour un petit sous-ensemble J d'indices $\{1,\dots,d\}$ et pour un vecteur $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^{|J^c|}$, on peut écrire $f(\mathbf{t}) = g(\mathbf{t}_J) + \boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{t}_{J^c}$

pour tout $\mathbf{t} \in \Delta$. Le problème de l'identification de composantes dans ce modèle est de déterminer, pour un indice j, si $j \in J$ ou pas. Une manière de poser le problème est d'effectuer un test d'hypothèses $Q[f] = \|f\|^2_{2,\mathbf{q}} = 0$, où $q_{\boldsymbol{l}} = (2\pi l_j)^4$. En gros, ceci correspond à vérifier que la dérivée partielle de second ordre de f par rapport à t_j est nulle ou pas (si l'hypothèse nulle n'est pas rejetée, alors $j \in J^c$). A nouveau, la Proposition 3.13 et le Théorème 3.7 fournissent un test minimax optimal exact pour ce problème de même que le taux minimax et la constante de séparation exacte.

Remarque 3.16. Dans le cas où les variables $\mathbf{t}_i$ ne sont pas observables et où seulement les x_i sont disponibles, notre modèle coïncide avec le modèle de convolution, pour lequel les taux minimax de test ont été obtenus par [15] dans le cas uni-dimensionnel avec une hypothèse nulle simple. Il serait intéressant d'étendre nos résultats à un tel modèle et d'obtenir des taux minimax et, si possible, des constantes de séparations dans le modèle de convolution multidimensionnel.

3.3.4 Tester la pertinence d'une direction dans le modèle à une direction révélatrice

Rappelons qu'un modèle à une direction révélatrice (single-index model) est un cas particulier de (3.1) correspondant aux fonctions f qui peuvent être écrites sous la forme $f(\mathbf{t}) = g(\boldsymbol{\beta}_0^\top \mathbf{t})$ pour une certaine fonction univariée $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et un vecteur $\boldsymbol{\beta}_0 \in \mathbb{R}^d$. Supposons maintenant que pour un vecteur candidat $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ on désire tester l'adéquation au modèle à une direction révélatrice [24, 38]. Ceci correspond à tester l'hypothèse

$$\exists g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \text{tel que} \qquad f(\mathbf{t}) = g(\boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{t}), \quad \forall \mathbf{t} \in \Delta.$$

Cette condition implique que $\frac{\partial f}{\partial t_i}(\mathbf{t}) \equiv \frac{\beta_i}{\|\boldsymbol{\beta}\|_2^2} \sum_{j=1}^d \beta_j \frac{\partial f}{\partial t_j}(\mathbf{t}) = \frac{\beta_i}{\|\boldsymbol{\beta}\|_2^2}\, \boldsymbol{\beta}^\top \nabla f(\mathbf{t}), \forall i \in \{1, \dots, d\}$, ce qui à nouveau peut être écrit

$$\sum_{i=1}^d \Big(\frac{\partial f}{\partial t_i} - \frac{\beta_i}{\|\boldsymbol{\beta}\|_2^2}\, \boldsymbol{\beta}^\top \nabla f(\mathbf{t}) \Big)^2 \equiv 0.$$

Sans perte de généralité, on suppose que $\|\boldsymbol{\beta}\|_2 = 1$ et on pose $q_{\boldsymbol{l}} = \sum_{i=1}^d (2\pi)^2 (l_i - (\boldsymbol{\beta}^\top \boldsymbol{l})\beta_i)^2 = (2\pi)^2 (\|\boldsymbol{l}\|_2^2 - (\beta^\top \boldsymbol{l})^2)$. On considère les classes de régularité homogène de Sobolev, c'est-à-dire $c_{\boldsymbol{l}} = \sum_{i=1}^d (2\pi l_i)^{2\sigma}$, avec $\sigma > d/4$. Alors, quand σ est un entier, et f une fonction 1-périodique qui est suffisamment régulière,

$$\|f\|^2_{2,\mathbf{c}} = \sum_{i=1}^d \Big\| \frac{\partial^\sigma f}{\partial t_i^\sigma} \Big\|_2^2 \quad \text{et} \quad \|f\|^2_{2,\mathbf{q}} = \sum_{i=1}^d \Big\| \frac{\partial f}{\partial t_i} - \beta_i [\boldsymbol{\beta}^\top \nabla f] \Big\|^2.$$

Pour énoncer le résultat concernant le taux minimax et la constante de séparation exacte dans ce problème, on introduit les constantes

$$\bar{C}_0 = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} [\|\boldsymbol{x}\|_2^2 - (\boldsymbol{\beta}^\top \boldsymbol{x})^2 - \|\boldsymbol{x}\|_{2\sigma}^{2\sigma}]_+^2 d\boldsymbol{x},$$
$$\bar{C}_1 = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} (\|\boldsymbol{x}\|_2^2 - (\boldsymbol{\beta}^\top \boldsymbol{x})^2)(\|\boldsymbol{x}\|_2^2 - (\boldsymbol{\beta}^\top \boldsymbol{x})^2 - \|\boldsymbol{x}\|_{2\sigma}^{2\sigma})_+ d\boldsymbol{x},$$

et $\bar{C}_2 = \bar{C}_1 - \bar{C}_0$.

Proposition 3.17. *Dans le cadre décrit ci-dessus, le taux minimax exact $r_{n,\gamma}^*$ est donné par $r_{n,\gamma}^* = C_\gamma^* r_n^*(1 + o(1))$, où*

$$r_n^* = n^{-\frac{2(\sigma-1)}{4\sigma+d}} \qquad \text{et} \qquad C_\gamma^* = \Big(\frac{4T_{1-\alpha/2}(\bar{C}_1/\bar{C}_2)^{\frac{d+4}{2(\sigma-1)}}\bar{C}_1^2}{\sigma^{d-1}(\sigma-1)\bar{C}_0}\Big)^{\frac{\sigma-1}{4\sigma+d}}.$$

La suite de tests ϕ_n du Théorème 3.7 est minimax optimale exacte si $T = T_{n,\gamma}$ est choisi de sorte que $T = (C_\gamma^* r_n^*)^{-2}(\bar{C}_1/\bar{C}_2)$.

3.4 Fonctionnelles quadratiques diagonales non positives et non négatives

Dans cette section, on considère un cadre plus général obtenu en abandonnant l'hypothèse que tous les éléments q_l du tableau $\mathbf{q}$ ont le même signe. C'est-à-dire, on a toujours $Q[f] = \sum_{l\in\mathcal{L}} q_l\theta_l^2$, mais maintenant

$$\mathcal{L}_+ = \{l : q_l > 0\} \neq \varnothing \qquad \text{et} \qquad \mathcal{L}_- = \{l : q_l < 0\} \neq \varnothing. \tag{3.20}$$

Les ensembles $\mathcal{F}_0$ et $\mathcal{F}_1(r_n)$ sont définis comme précédemment, cf. (3.5), et on utilise les mêmes notations que dans le cas positif. A savoir, pour $T > 0$, on pose $\mathcal{N}(T) = \{l \in S_Q : c_l < T|q_l|\}$, $N(T) = |\mathcal{N}(T)|$ et $M(T) = \sum_{l\in\mathcal{N}(T)} q_l^2$.

On souligne que, dans le cas considéré dans cette section, un phénomène de transition de phase se produit : il y a un cas régulier dans lequel le taux est indépendant du degré précis de régularité, et un cas irrégulier où le taux dépend de la régularité. Plus précisément, soit $|Q|$ la fonctionnelle quadratique diagonale positive dont les coefficients sont $|q_l|$ pour tout $l \in \mathcal{L}$. Rappelons que le taux minimax r_n^* dans le test de pertinence de $|Q|[f]$ (voir la remarque 3.10) est déterminé par

$$n(r_n^*)^2 \asymp M(r_n^{*-2})^{1/2}.$$

Dans notre contexte, ce taux correspond au cas irrégulier : si Σ contient des fonctions qui ne sont pas suffisamment régulières (par rapport à la difficulté du problème, c'est-à-dire si les q_l ne sont pas "trop grands" comparés aux c_l), le taux minimax correspondant à Q est le même que pour $|Q|$ obtenu dans les sections précédentes. En revanche, dans le cas régulier, le taux minimax ne dépend pas de la régularité et est égal à $r_n^* = n^{-1/4}$.

3.4.1 Procédure de test et borne supérieure sur le taux minimax

La procédure de test que l'on utilise dans ce contexte est du même type que celle utilisée pour les fonctionnelles quadratiques positives. Plus précisément, pour un paramètre T_n et un seuil u, on pose $\phi_n(T) = \mathbf{1}_{|U_n(T)|>u}$, où la U-statistique $U_n(T)$ est définie par

$$U_n(T) = \binom{n}{2}^{-1/2} \sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j G_T(\mathbf{t}_i, \mathbf{t}_j).$$

avec $G_T(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) = M(T)^{-1/2} \sum_{l\in\mathcal{N}(T)} q_l \varphi_l(\mathbf{t}_1)\varphi_l(\mathbf{t}_2)$.

Théorème 3.18. *Soit $\gamma \in (0,1)$ un seuil. Notons $\mathtt{T}_Q[f]$ la fonctionnelle linéaire $\mathtt{T}_Q[f] = \sum_{l\in\mathcal{N}(T)} q_l \theta_l[f]\varphi_l$. Supposons que $T > 0$ est tel que les hypothèses*

[D1] *il existe $D_1 > 0$ tel que $|\mathcal{N}(T)| \max_{l\in\mathcal{N}(T)} q_l^2 \le D_1 \sum_{l\in\mathcal{N}(T)} q_l^2$,*

[D2] *il existe $D_2 > 0$ tel que $\sup_{\mathbf{t}\in\Delta} \sum_{l\in\mathcal{N}(T)} \varphi_l(\mathbf{t})^2 \le D_2|\mathcal{N}(T)|$,*

[D3] *il existe $D_3 > 0$ tel que $\sup_{f\in\Sigma} \|f\|_4 \le D_3$,*

[D4] *il existe $D_4 > 0$ tel que $\sup_{f\in\Sigma} \|f \cdot \mathtt{T}_Q[f]\|_2^2 \le D_4$,*

sont satisfaites. Posons $B_1 = 6 + 12D_1D_2D_3^2 + 6D_1D_2D_3^4$ et $B_2 = 4D_4$. Alors, pour tout

$$u \ge \frac{n}{T\sqrt{2M(T)}} + \gamma^{-1/2}\big(B_1 + B_2 n M(T)^{-1}\big)^{1/2},$$

l'erreur de première espèce est bornée par $\gamma/2$: $\sup_{f\in\mathcal{F}_0} P_f(\phi_n(T) = 1) \le \frac{\gamma}{2}$.
Si, en plus,

$$\rho^2 \ge \big[u + \gamma^{-1/2}\big(B_1 + B_2 n M(T)^{-1}\big)^{1/2}\big]\frac{\sqrt{2M(T)}}{n} + \frac{1}{T}$$

alors l'erreur de seconde espèce est aussi bornée par $\gamma/2$: $\sup_{f\in\mathcal{F}_1(\rho)} P_f(\phi_n(T) = 0) \le \frac{\gamma}{2}$. En conséquence, si on choisit $u = (2M(T))^{-1/2}(n/T) + \gamma^{-1/2}\big(B_1 + B_2 n M(T)^{-1}\big)^{1/2}$ alors le taux d'erreur cumulée du test $\phi_n(T)$ est borné par γ pour toute alternative $\mathcal{F}_1(\rho)$ telle que $\rho^2 \ge 2\sqrt{2}\gamma^{-1/2}n^{-1}\big(B_1M(T) + B_2 n\big)^{1/2} + 2\sqrt{2}T^{-1}$.

Ce théorème fournit une évaluation non asymptotique du taux d'erreur cumulée du U-test linéaire basé sur le tableau $w_l \propto q_l$ tronqué au niveau T. Dans les cas où les constantes B_1 et B_2 peuvent être convenablement estimées et où la fonction $M(T)$ admet une forme simple, il est raisonnable de choisir le niveau de coupure T en minimisant l'expression $2\sqrt{2}\gamma^{-1/2}n^{-1}\big(B_1M(T) + B_2 n\big)^{1/2} + 2T^{-1}$. En choisissant T de cette façon, on essaie d'élargir l'ensemble des alternatives pour lesquelles le taux d'erreur cumulée reste en dessous du seuil prescrit γ. Ainsi, le dernier théorème implique la borne supérieure non-asymptotique suivante sur le taux de séparation minimax :

$$(r^*_{n,\gamma})^2 \le \inf_{T>0}\Big(\frac{2\sqrt{2}\big(B_1M(T) + B_2 n\big)^{1/2}}{n\gamma^{1/2}} + \frac{2}{T}\Big). \tag{3.21}$$

Cette borne non-asymptotique montre clairement la présence de deux régimes asymptotiques. Le premier correspond au cas où n est bien plus grand que $M(T^*)$, tandis que le second régime correspond à $n = o(M(T^*))$. Ici, T^* est le minimiseur de la borne sur ρ^2 obtenue dans le théorème ci-dessus. Le prochain corollaire montre les taux de séparation dans ces deux différents régimes.

Corollaire 3.19. *Supposons que les tableaux* $\mathbf{q}$ *and* $\mathbf{c}$ *sont tels que* $M(\alpha T) \asymp_{T\to\infty} M(T)$ *pour tout* $\alpha > 0$. *Soit* T_n^0 *une suite de nombres positifs satisfaisant* $T_n^0\sqrt{M(T_n^0)} \asymp n$. *Si pour la suite* $T_n = T_n^0 \wedge n^{1/2}$ *toutes les hypothèses du Théorème 3.18 sont satisfaites, alors pour un certain* $C > 0$ *le U-test linéaire* $\phi_n(T)$ *basé sur le seuil* $T = T_n$ *satisfait*

$$\gamma_n(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1(CT_n^{-1/2}), \phi_n) \le \gamma.$$

Ainsi, le taux de convergence est $r_n^* = (T_n^0)^{-1/2}$ *si* $T_n^0 = o(n^{1/2})$ *et* $r_n^* = n^{-1/4}$ *sinon.*

Remarque 3.20. La condition **[D4]** du Théorème 3.18 est plus obscure que les autres hypothèses du théorème. Clairement, elle impose des contraintes de régularité supplémentaires à la fonction f. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on peut aisément vérifier que l'une ou l'autre des hypothèses **[D4-1]** et **[D4-2]** ci-dessous est suffisante pour **[D4]** :

[D4-1] Pour certaines constantes D_5 et D_6, $\sup_{f\in\Sigma} \|f\|_\infty \le D_5$ et $\max_{l\in\mathcal{N}(T)} |q_l/c_l| \le D_6$.

[D4-2] Pour une certaine constante D_4', $\sup_{f\in\Sigma} \|\mathtt{T}_Q[f]\|_4 \le D_4'$.

3.4.2 Borne inférieure sur le taux minimax

On va montrer dans cette sous-section que le taux de séparation asymptotique fourni par le Corollaire 3.19 n'est pas améliorable, dans le sens où il n'y a aucune procédure de test ayant un taux de séparation plus rapide. A cette fin, pour tout $a \in \{-, +\}$ on pose $M_a(T) = \sum_{l\in\mathcal{L}_a\cap\mathcal{N}(T)} q_l^2$, $N_a(T) = |\mathcal{L}_a \cap \mathcal{N}(T)|$,

$$M^*(T) = M_+(T) \vee M_-(T) \tag{3.22}$$

$$N^*(T) = N_+(T)\mathbf{1}_{\{M_+(T)>M_-(T)\}} + N_-(T)\mathbf{1}_{\{M_+(T)\le M_-(T)\}}. \tag{3.23}$$

Théorème 3.21. *Considérons le problème de test* $H_0 : f \in \mathcal{F}_0$ *contre* $H_1 : f \in \mathcal{F}_1(\rho)$, *où* $\mathcal{F}_0$ *et* $\mathcal{F}_1$ *sont définis par (3.5) et*

$$\Sigma_L = \Big\{ f = \sum\nolimits_{l\in\mathcal{L}} \theta_l[f]\varphi_l : \ \sum\nolimits_{l\in\mathcal{L}} c_l\theta_l[f]^2 \le 1, \ \|f\|_4 \vee \|f\cdot \mathtt{T}_Q[f]\|_2 \le L \Big\}.$$

Supposons que les ensembles $\mathcal{L}_+$ *and* $\mathcal{L}_-$ *définis par (3.20) sont tous les deux non vides et que les* ξ_i *sont gaussiens. Les assertions suivantes sont vraies.*

1. *Pour tout* $\gamma < 1/4$ *il existe* $C > 0$ *tel que* $\liminf_{n\to\infty} \gamma_n(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1(Cn^{-1/4})) > \gamma$.
2. *Soit* T_n^0 *une suite de réels tels que* $4T_n^0\sqrt{M(T_n^0)} \ge nz_{1-\gamma/2}^{-1}$ *quand* $n \to \infty$. *Si les hypothèses* **[D1]** *(cf. Théorème 3.18) et*

[D5] $N^*(T_n^0) \to \infty$ *avec* $N^*(T_n^0)\log N^*(T_n^0) = o(n)$,

[D6] *il existe* $D_6 > 0$ *tel que* $\sup_{\mathbf{t}\in\Delta}\sum_{l\in\mathcal{N}^*(T_n^0)}\varphi_l(\mathbf{t})^2 \le D_6 N^*(T_n^0)$,

sont satisfaites, alors il existe $C > 0$ *tel que*

$$\liminf_{n\to\infty}\gamma_n(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1(C(T_n^0)^{-1/2})) \ge \gamma.$$

Corollaire 3.22. *En combinant les deux assertions de ce théorème, on obtient que le taux minimax de séparation* r_n^* *est minoré par* $n^{-1/4} \vee (T_n^0)^{-1/2} = (n^{1/2} \wedge T_n^0)^{-1/2} = T_n^{-1/2}$. *Ainsi, si les conditions des Théorèmes 3.18 et 3.21 sont satisfaites, alors le taux minimax de séparation est donné par* $r_n^* = T_n^{-1/2}$, *où* $T_n = n^{1/2} \wedge T_n^0$ *et* T_n^0 *est déterminé par la relation* $T_n^0 M(T_n^0)^{1/2} \asymp n$.

3.4.3 Tester l'égalité des normes

Comme application de la méthodologie de test développée dans cette section, on considère le problème de test de l'égalité des normes de deux fonctions observées dans un environnement bruité. Plus précisément, considérons le problème suivant à deux échantillons : pour $i = 1, \dots, n$ on observe $(x_{1,i}, \mathbf{t}_{1,i})$ et $(x_{2,i}, \mathbf{t}_{2,i})$ tels que

$$x_{s,i} = g_s(\mathbf{t}_{s,i}) + \xi_{s,i}, \qquad i = 1, \dots, n; \quad s = 1, 2,$$

où les $\mathbf{t}_{s,i}$ sont des vecteurs aléatoires indépendants suivant la loi uniforme sur $[0,1]^d$. De plus, on suppose que les $\xi_{s,i}$ sont i.i.d. tels que $E(\xi_{s,i}|\{\mathbf{t}_{s,j}\}) = 0$, $E(\xi_{s,i}^2|\{\mathbf{t}_{s,j}\}) = 1$ et, pour un certain $C_\xi < \infty$, $E(\xi_{s,i}^4|\{\mathbf{t}_{s,j}\}) \le C_\xi$ presque sûrement.

En supposant que à la fois g_1 et g_2 appartiennent à une classe de régularité Σ, on désire tester l'hypothèse

$$H_0 : \|g_1\|_2 = \|g_2\|_2, \qquad \text{contre} \qquad H_1 : \big|\|g_1\|_2^2 - \|g_2\|_2^2\big| \ge \rho^2.$$

Il peut être utile d'effectuer ce type de test avant d'utiliser un modèle de courbes translatées dans le contexte du recalage de courbes [22, 18]. En effet, s'il existe $\boldsymbol{\tau} \in [0,1]^d$ tel que $g_1(\mathbf{t}) = g_2(\mathbf{t} - \boldsymbol{\tau})$ pour tout $\mathbf{t} \in [0,1]^d$ et si la fonction g_1 est 1-périodique, alors nécessairement $\|g_1\|_2 = \|g_2\|_2$. Ainsi, le rejet de l'hypothèse nulle implique l'inadéquation au modèle de courbes translatées. De façon à montrer quel type de test peut être dérivé du cadre présenté dans les sous-sections précédentes, considérons le cas d'un ellipsoïde de Sobolev Σ.

Soit $\{\psi_m\}_{m\in\mathcal{M}}$ une base orthonormale du sous-espace $L_{2,c}([0,1]^d)$ de $L_2([0,1]^d)$ consistant en toutes les fonctions orthogonales à la fonction constante. On va supposer que à la fois g_1 et g_2 sont centrés (ceci implique qu'ils sont orthogonaux à la fonction constante). Les coefficients de Fourier d'une fonction g par rapport à la base $\{\psi_m\}$ vont être notés $\theta_m^\psi[g]$. On suppose que pour un certain tableau $\mathbf{c}$ et une constante $L > 0$ on a

$$g_s \in \Sigma_L^0 = \Big\{g \in L_{2,c}([0,1]^d) : \sum\nolimits_{m\in\mathcal{M}} c_m \theta_m^\psi[g]^2 \le 1,\ \|g\|_4 \le L\Big\}, \qquad \forall s \in \{1,2\}.$$

Supposons maintenant que l'on désire tester

$$H_0 : \sum_{m\in\mathcal{M}} q_m\theta_m^{\psi}[g_1]^2 = \sum_{m\in\mathcal{M}} q_m\theta_m^{\psi}[g_2]^2, \quad \text{contre} \quad H_1 : \Big|\sum_{m\in\mathcal{M}} q_m(\theta_m^{\psi}[g_1]^2 - \theta_m^{\psi}[g_2]^2)\Big| \geq \rho^2,$$

où $\mathbf{q} = \{q_m\}$ est un tableau donné. De façon à montrer que ce problème peut être résolu dans le cadre des sous-sections précédentes, on introduit l'ensemble fonctionnel

$$\Sigma_L = \Big\{f : [0,1]^{2d} \to \mathbb{R} : f(\mathbf{t}) = g_1(t_1,\dots,t_d) + g_2(t_{d+1},\dots,t_{2d}) \text{ avec } g_1, g_2 \in \Sigma_L^0\Big\}.$$

En posant $\mathcal{L} = \mathcal{M}\times\{1,2\}$ et pour $l = (m,s) \in \mathcal{M}\times\{1,2\}$

$$\varphi_l(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2) = \psi_m(\mathbf{t}_s), \qquad \text{pour tout} \qquad \mathbf{t} = (\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2) \in [0,1]^d \times [0,1]^d,$$

on obtient une base orthonormale de Σ_L. Clairement, pour une fonction $f \in \Sigma_L$, on a $\theta_l^{\varphi}[f] = \theta_{m,s}^{\varphi}[f] = \theta_m^{\psi}[g_s]$. Ceci implique que Σ_L est inclus dans l'ensemble $\Sigma_L^2 = \{f : \sum_{(m,s)} c_m\theta_{m,s}^{\varphi}[f]^2 \leq 2;\ \|f\|_4 \leq 2L\}$ et contient l'ensemble $\Sigma_L^1 = \{f : \sum_{(m,s)} c_m\theta_{m,s}^{\varphi}[f]^2 \leq 1, \|f\|_4 \leq L\}$. Ainsi, pour étudier le taux de séparation d'une procédure de test on peut supposer que $f \in \Sigma_L^2$, tandis que pour établir les bornes inférieures sur le taux minimax de séparation on peut utiliser la relation $\Sigma_L^1 \subset \Sigma_L$. Dans les deux cas, ceci correspond parfaitement au cadre des sous-sections précédentes.

On donne un exemple concret en posant $\mathcal{M} = \mathbb{Z}^d$ et en choisissant pour $\{\psi_{\boldsymbol{m}}\}$ la base de Fourier en dimension d. Comme dans l'exemple de la Sous-section 3.3.3, on se concentre sur les classes de régularité anisotropes de Sobolev définies via les coefficients

$$c_{\boldsymbol{m}} = \sum_{i=1}^{d} (2\pi m_i)^{2\sigma_i}, \qquad \boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}^d,$$

pour un certain $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1,\dots,\sigma_d) \in \mathbb{R}_+^d$. Comme précédemment, $\bar\sigma$ représente la moyenne harmonique des σ_i : $\bar\sigma = \big(\frac{1}{d}\sum_{i=1}^d \sigma_i^{-1}\big)^{-1}$. Pour tester l'égalité de normes, on introduit les coefficients $q_{\boldsymbol{l}}$, $\boldsymbol{l} = (\boldsymbol{m}, s) \in \mathbb{Z}^d \times \{1,2\}$ et la fonctionnelle quadratique Q :

$$q_{\boldsymbol{m},s} = (-1)^s, \qquad (\boldsymbol{m}, s) \in \mathbb{Z}^d \times \{1,2\}.$$

Les Théorèmes 3.18 et 3.21, de même que les calculs faits dans la preuve de la Proposition 3.13, indiquent que le taux minimax de séparation dans le problème décrit ci-dessus semble être $r_n^* = n^{-(\frac{2\bar\sigma}{4\bar\sigma+d}\wedge\frac{1}{4})}$. En effet toutes les hypothèses du premier théorème sont vérifiées, mais pour la borne inférieure la condition **D5** du deuxième théorème n'est vérifiée que pour $\bar\sigma > d/4$ ce qui donne en toute rigueur $n^{\frac{1}{4}} \leq r_n^* \leq n^{-(\frac{2\bar\sigma}{4\bar\sigma+d}\wedge\frac{1}{4})}$. En réalité dans le modèle plus simple de suite gaussienne, on aurait aussi obtenu $n^{-\frac{2\bar\sigma}{4\bar\sigma+d}} \leq r_n^*$ en faisant une démonstration similaire car la condition **D5** n'apparaît que dans le modèle de régression. Ce taux montre que la frontière entre les deux régimes correspond à la condition $\bar\sigma = d/4$. En d'autres termes, on est dans le régime régulier quand $\bar\sigma > d/4$. Il est intéressant de remarquer que, même si on n'est pas capable d'établir un lien direct, ceci est aussi le régime sous lequel l'injection de Sobolev $W_2^{\boldsymbol{\sigma}} \subset L_4([0,1]^d)$ est vraie.

3.5 Preuves des résultats énoncés en Section 3.2

3.5.1 Preuve de la Proposition 3.2

Tout au long de la preuve, les termes $o(1)$, $O(1)$ et les équivalences sont uniformes sur Σ. Soit $\mathcal{L}(\mathbf{w}_n)$ le support de $\mathbf{w}_n$. $E_f^{\mathcal{D}_2}$ va représenter l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{D}_2$. On définit

$$h_n[f, \mathbf{w}_n] = \Big(\frac{m(m-1)}{2}\Big)^{1/2} \sum\nolimits_{l\in\mathcal{L}(\mathbf{w}_n)} w_{l,n}\theta_l^2[f], \tag{3.24}$$

$$G_n(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) = \sum_{l\in\mathcal{L}(\mathbf{w}_n)} w_{l,n}\varphi_l(\mathbf{t}_1)\varphi_l(\mathbf{t}_2). \tag{3.25}$$

Ceci permet de réécrire la U-statistique U_n sous la forme $U_n = U_{n,0} + U_{n,1} + U_{n,2}$ où

$$U_{n,k} = \Big(\frac{2}{m(m-1)}\Big)^{1/2} \sum_{1\le i<j\le m} K_{n,k}(\tilde{\boldsymbol{z}}_i, \tilde{\boldsymbol{z}}_j), \qquad k = 0, 1, 2,$$

sont les U-statistiques de noyaux

$$K_{n,0}(\tilde{\boldsymbol{z}}_1, \tilde{\boldsymbol{z}}_2) = \xi_1\xi_2 G_n(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2), \tag{3.26}$$

$$K_{n,1}(\tilde{\boldsymbol{z}}_1, \tilde{\boldsymbol{z}}_2) = \Big[\xi_1(f - \widehat{\Pi f}_n)(\mathbf{t}_2) + \xi_2(f - \widehat{\Pi f}_n)(\mathbf{t}_1)\Big] G_n(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2), \tag{3.27}$$

$$K_{n,2}(\tilde{\boldsymbol{z}}_1, \tilde{\boldsymbol{z}}_2) = (f - \widehat{\Pi f}_n)(\mathbf{t}_1)(f - \widehat{\Pi f}_n)(\mathbf{t}_2) G_n(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2). \tag{3.28}$$

Pour prouver la Proposition 3.2 et les résultats ultérieurs, on a besoin de deux lemmes auxiliaires.

Lemme 3.23. *Soit $\mathbf{w}_n = (w_{l,n})_{l\in\mathcal{L}}$ une famille de nombres positifs contenant seulement un nombre fini d'éléments non nuls et telle que $\sum_{l\in\mathcal{L}} w_{l,n}^2 = 1$. Soit $\mathcal{L}(\mathbf{w}_n)$ le support de $\mathbf{w}_n$. Alors l'espérance de la U-statistique U_n est donnée par :*

$$E_f[U_n] = E_f[U_{n,2}] = h_n[f, \mathbf{w}_n],$$

tandis que pour les variances on a

$$\begin{aligned} &E_f[U_{n,0}^2] = 1, \\ &E_f[U_{n,1}^2] \le 2\|\mathbf{w}_n\|_\infty^2 \Big(\sup_{\mathbf{t}\in\Delta} \sum\nolimits_{l\in\mathcal{L}(\mathbf{w}_n)} \varphi_l^2(\mathbf{t})\Big)\Big(\|\Pi_{S_Q} f\|_2^2 + E_f\big[\|\Pi f - \widehat{\Pi f}_n\|_2^2\big]\Big), \end{aligned} \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned} Var_f[U_{n,2}] \le\ & 8\|\mathbf{w}_n\|_\infty^2 \Big(\sup_{\mathbf{t}\in\Delta} \sum_{l\in\mathcal{L}(\mathbf{w}_n)} \varphi_l^2(\mathbf{t})\Big)\Big(\|\Pi_{S_Q} f\|_4^4 + E_f\big[\|\Pi f - \widehat{\Pi f}_n\|_4^4\big]\Big) \\ &+ 8h_n[f, \mathbf{w}_n]\|\mathbf{w}_n\|_\infty \Big(\sup_{\mathbf{t}\in\Delta} \sum_{l\in\mathcal{L}(\mathbf{w}_n)} \varphi_l^2(\mathbf{t})\Big)^{1/2}\Big(\|\Pi_{S_Q} f\|_4^4 + E_f\big[\|\Pi f - \widehat{\Pi f}_n\|_4^4\big]\Big)^{1/2}. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Démonstration. Il est clair que $E_f U_{n,0} = E_f U_{n,1} = 0$, tandis que

$$E_f[U_{n,2}] = \Big(\frac{m(m-1)}{2}\Big)^{1/2} E_f[K_{n,2}(\tilde{\boldsymbol{z}}_1, \tilde{\boldsymbol{z}}_2)]$$

avec

$$E_f[K_{n,2}(\tilde{\boldsymbol{z}}_1, \tilde{\boldsymbol{z}}_2)] = E_f\Big[\sum\nolimits_{l\in\mathcal{L}(\mathbf{w}_n)} w_{l,n}\Big(\int (f(\mathbf{t}) - \widehat{\Pi f}_n(\mathbf{t}))\varphi_l(\mathbf{t})d\mathbf{t}\Big)^2\Big].$$

Comme $\widehat{\Pi f}_n \in \operatorname{span}(\{\varphi_l\}_{l\in S_Q^c})$, on a $\int \widehat{\Pi f}_n \varphi_l = 0$ pour tout $l \in S_Q$. Donc

$$E_f[U_{n,2}] = \Big(\frac{m(m-1)}{2}\Big)^{1/2} \sum\nolimits_{l\in\mathcal{L}(\mathbf{w}_n)} w_{l,n}\theta_l^2[f] = h_n[f, \mathbf{w}_n].$$

Maintenant, évaluons les variances. Puisque les ξ_i sont des variables aléatoires à moyenne nulle non corrélées et de variance un, et que les φ_l sont orthonormaux, on a $E_f[U_{n,0}^2] = E_f[G_n(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)^2] = \sum_l w_{l,n}^2 = 1$. Pour $U_{n,1}$, on a

$$\operatorname{Var}_f[U_{n,1}] = E_f[U_{n,1}^2] = E_f E_f^{\mathcal{D}_2}[K_{n,1}^2(\tilde{\boldsymbol{z}}_1, \tilde{\boldsymbol{z}}_2)].$$

En utilisant la définition de $G_n(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$, on obtient

$$\begin{aligned} E_f^{\mathcal{D}_2}[K_{n,1}^2(\tilde{\boldsymbol{z}}_1, \tilde{\boldsymbol{z}}_2)] &= 2\int_\Delta \int_\Delta (f - \widehat{\Pi f}_n)^2(\mathbf{t}_1) G_n^2(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) d\mathbf{t}_1 d\mathbf{t}_2 \\ &= 2\int_\Delta (f - \widehat{\Pi f}_n)^2(\mathbf{t}_1) \sum_{l\in\mathcal{L}(\mathbf{w}_n)} w_{l,n}^2 \varphi_l^2(\mathbf{t}_1) d\mathbf{t}_1 \\ &\le 2\Big(\max_{l\in\mathcal{L}(\mathbf{w}_n)} w_{l,n}^2\Big)\Big(\sup_{\mathbf{t}\in\Delta} \sum\nolimits_{l\in\mathcal{L}(\mathbf{w}_n)} \varphi_l^2(\mathbf{t})\Big)\|f - \widehat{\Pi f}_n\|_2^2. \end{aligned}$$

Alors le théorème de Pythagore donne

$$E_f\|f - \widehat{\Pi f}_n\|_2^2 = \|f - \Pi f\|_2^2 + E_f\|\Pi f - \widehat{\Pi f}_n\|_2^2 = \|\Pi_{S_Q} f\|_2^2 + E_f\|\Pi f - \widehat{\Pi f}_n\|_2^2.$$

Ceci complète la preuve de (3.29). Quant à la variance de $U_{n,2}$, on a

$$Var_f[U_{n,2}] = E_f E_f^{\mathcal{D}_2}[U_{n,2}^2] - (E_f[U_{n,2}])^2 = A_{n,1} + A_{n,2} + A_{n,3},$$

où

$$\begin{aligned} A_{n,1} &= E_f \iint (f - \widehat{\Pi f}_n)^2(\mathbf{t}_1)(f - \widehat{\Pi f}_n)^2(\mathbf{t}_2) G_n^2(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) d\mathbf{t}_1 d\mathbf{t}_2, \\ A_{n,2} &= \frac{2}{m(m-1)} \sum_{(i,j,k,l)\in P_3: i<j,k<l} E_f\Big[(f - \widehat{\Pi f}_n)(\mathbf{t}_i)(f - \widehat{\Pi f}_n)(\mathbf{t}_j) G_n(\mathbf{t}_i, \mathbf{t}_j) \\ &\qquad \times (f - \widehat{\Pi f}_n)(\mathbf{t}_k)(f - \widehat{\Pi f}_n)(\mathbf{t}_l) G_n(\mathbf{t}_k, \mathbf{t}_l)\Big] \\ &= \frac{2}{m(m-1)} 2\binom{m}{3} E_f \iiint (f - \widehat{\Pi f}_n)^2(\mathbf{t}_1)(f - \widehat{\Pi f}_n)(\mathbf{t}_2) G_n(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) \\ &\qquad \times (f - \widehat{\Pi f}_n)(\mathbf{t}_3) G_n(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_3) d\mathbf{t}_1 d\mathbf{t}_2 d\mathbf{t}_3, \end{aligned}$$

et

$$A_{n,3} = \frac{2}{m(m-1)} \sum_{i,j,k,l \text{ distincts } :i<j,k<l} E_f\Big\{ \iint f(\mathbf{t}_i) f(\mathbf{t}_j) G_n(\mathbf{t}_i, \mathbf{t}_j) d\mathbf{t}_i d\mathbf{t}_j \Big\} \times E_f\Big\{ \iint f(\mathbf{t}_k) f(\mathbf{t}_l) G_n(\mathbf{t}_k, \mathbf{t}_l) d\mathbf{t}_k d\mathbf{t}_l \Big\} - (E_f U_{n,2})^2$$
$$= \frac{2}{m(m-1)} 2\binom{m}{4} E_f\Big\{ \iint f(\mathbf{t}_1) f(\mathbf{t}_2) G_n(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) d\mathbf{t}_1 d\mathbf{t}_2 \Big\}^2 - (E_f U_{n,2})^2.$$

Le terme $2\binom{m}{4}$ vient du fait qu'il y a $\binom{m}{4}$ quadruplets possibles et que chaque quadruplet est obtenu deux fois. On a noté P_3 l'ensemble des quadruplets (i,j,k,l) tels qu'il y ait exactement trois éléments distincts parmi (i,j,k,l). Il y a $\binom{m}{3}$ triplets possibles et chaque triplet peut être obtenu de deux façons différentes. Bornons le premier terme $A_{n,1}$:

$$A_{n,1} = E_f \sum_{l,l' \in \mathcal{L}(\mathbf{w}_n)} w_{l,n} w_{l',n} \Big(\int (f - \widehat{\Pi f}_n)^2(\mathbf{t}) \varphi_l(\mathbf{t}) \varphi_{l'}(\mathbf{t})\, d\mathbf{t} \Big)^2.$$

Maintenant, au vu de l'inégalité de Bessel,

$$A_{n,1} \leq \max_{l \in \mathcal{L}(\mathbf{w}_n)} w_{l,n}^2 E_{f,B} \sum_{l \in \mathcal{L}(\mathbf{w}_n)} \int (f - \widehat{\Pi f}_n)^4(\mathbf{t}) \varphi_l^2(\mathbf{t})\, d\mathbf{t}$$
$$\leq \Big(\max_{l \in \mathcal{L}(\mathbf{w}_n)} w_{l,n}^2 \Big) \Big(\sup_{\mathbf{t} \in \Delta} \sum\nolimits_{l \in \mathcal{L}(\mathbf{w}_n)} \varphi_l^2(\mathbf{t}) \Big) E_f[\|f - \widehat{\Pi f}_n\|_4^4],$$

et l'expression à l'intérieur de l'espérance peut être bornée en utilisant l'inégalité $\|f - \widehat{\Pi f}_n\|_4^4 \leq 2^3(\|\Pi_{S_Q} f\|_4^4 + \|\Pi f - \widehat{\Pi f}_n\|_4^4)$.

Le terme $A_{n,2}$ peut être traité de la même manière. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$A_{n,2} = \frac{4}{m(m-1)} \binom{m}{3} \sum_{l,l' \in \mathcal{L}(\mathbf{w}_n)} w_{l,n} w_{l',n} \theta_l[f] \theta_{l'}[f] E_f\Big\{ \int (f - \widehat{\Pi f}_n)^2(\mathbf{t}) \varphi_l(\mathbf{t}) \varphi_{l'}(\mathbf{t})\, d\mathbf{t} \Big\}$$
$$\leq \binom{m}{2}^{1/2} \Big(\sum_l w_{l,n}^2 \theta_l[f]^2 \Big) \Big(\sum_{l,l' \in \mathcal{L}(\mathbf{w}_n)} \Big\{ \int E_f[(f - \widehat{\Pi f}_n)^2(\mathbf{t})] \varphi_l(\mathbf{t}) \varphi_{l'}(\mathbf{t})\, d\mathbf{t} \Big\}^2 \Big)^{1/2}$$
$$\leq \Big(\max_{l \in \mathcal{L}(\mathbf{w}_n)} w_{l,n} \Big) h_n[f, \mathbf{w}_n] \Big(\sum_{l,l' \in \mathcal{L}(\mathbf{w}_n)} E_f\Big\{ \int (f - \widehat{\Pi f}_n)^2(\mathbf{t}) \varphi_l(\mathbf{t}) \varphi_{l'}(\mathbf{t})\, d\mathbf{t} \Big\}^2 \Big)^{1/2}.$$

En vertu de l'inégalité de Bessel, on a

$$A_{n,2} \leq \Big(\max_{l \in \mathcal{L}(\mathbf{w}_n)} w_{l,n} \Big) h_n[f, \mathbf{w}_n] \Big(\sum_{l \in \mathcal{L}(\mathbf{w}_n)} \int E_f[(f - \widehat{\Pi f}_n)^4(\mathbf{t})] \varphi_l^2(\mathbf{t})\, d\mathbf{t} \Big)^{1/2}$$
$$\leq \Big(\max_{l \in \mathcal{L}(\mathbf{w}_n)} w_{l,n} \Big) h_n[f, \mathbf{w}_n] \Big(\sup_{\mathbf{t} \in \Delta} \sum_{l \in \mathcal{L}(\mathbf{w}_n)} \varphi_l^2(\mathbf{t})\, d\mathbf{t} \Big)^{1/2} (E_f[\|f - \widehat{\Pi f}_n\|_4^4])^{1/2}.$$

La dernière espérance peut être bornée de manière identique à ce qui a été fait quelques lignes ci-dessus pour le terme $A_{n,1}$. Le dernier terme $A_{n,3}$ est en fait négatif

$$A_{n,3} = \frac{4}{m(m-1)} \binom{m}{4} \Big(\sum\nolimits_{l \in \mathcal{L}(\mathbf{w}_n)} w_{l,n} \theta_l^2 \Big)^2 - \frac{m(m-1)}{2} \Big(\sum\nolimits_{l \in \mathcal{L}(\mathbf{w}_n)} w_{l,n} \theta_l^2 \Big)^2 \leq 0.$$

En combinant ces estimations, on obtient (3.30). □

Lemme 3.24. *Soit* $\mathbf{w}_n = (w_{l,n})_{l\in\mathcal{L}}$ *une famille de nombres positifs contenant seulement un nombre fini d'éléments non nuls et telle que* $\sum_{l\in\mathcal{L}} w_{l,n}^2 = 1$. *Supposons que la variable aléatoire* ξ_1 *a un quatrième moment fini :* $E_f[\xi_1^4] < \infty$. *Si, quand* $n \to \infty$,

$$\|\mathbf{w}_n\|_\infty = o(1) \qquad et \qquad \|\mathbf{w}_n\|_\infty^2 \Big(\sup_{\mathbf{t}\in\Delta} \sum\nolimits_{l\in\mathcal{L}(\mathbf{w}_n)} \varphi_l(\mathbf{t})^2 \Big)^2 = o(n), \tag{3.31}$$

alors $U_{n,0}$ *est asymptotiquement gaussien* $\mathcal{N}(0,1)$.

Démonstration. Ce résultat est une conséquence immédiate de [43, Theorem 1]. □

Avec ces outils en main, on est maintenant en position d'établir la normalité asymptotique de la U-statistique U_n ce qui mène à une évaluation de l'errreur de première espèce du U-test. Rappelons que, pour $f \in \mathcal{F}_0$, on a $Q[f] = \sum q_l \theta_l[f]^2 = 0$ et, par conséquent, $\theta_l[f] = 0$ pour tout $l \in S_Q = \{l : q_l \neq 0\}$. D'où, pour tout $f \in \mathcal{F}_0$, $h_n[f, \mathbf{w}_n] = 0$ et $\Pi_{S_Q} f = 0$. Donc, il vient du lemme 3.23 que sous les hypothèses de la proposition, les convergences $E_f[U_{n,1}^2] \to 0$ et $E_f[U_{n,2}^2] \to 0$ sont vraies uniformément en $f \in \mathcal{F}_0$. Ceci implique que $U_{n,1}$ et $U_{n,2}$ tendent vers zéro en P_f-probabilité, uniformément en $f \in \mathcal{F}_0$. D'autre part, d'après le lemme 3.24, $U_{n,0} \to \mathcal{N}(0,1)$ en loi. La conclusion de la proposition vient maintenant du lemme de Slutsky.

3.5.2 Preuve de la Proposition 3.3

On remarque d'abord que pour tout $\bar{h} > 0$ on a

$$\sup_{f\in\mathcal{F}_1(\rho)} P_f(U_n \le u) = \Big(\sup_{\substack{f\in\mathcal{F}_1(\rho)\\ h_n[f,\mathbf{w}_n]>\bar{h}}} P_f(U_n \le u) \Big) \bigvee \Big(\sup_{\substack{f\in\mathcal{F}_1(\rho)\\ h_n[f,\mathbf{w}_n]\le\bar{h}}} P_f(U_n \le u) \Big). \tag{3.32}$$

La valeur de $\bar{h}$ va être précisée plus tard dans la preuve. Supposons simplement pour l'instant que $\bar{h} > 2(1+u)$. Alors,

$$\sup_{\substack{f\in\mathcal{F}_1(\rho);\\ h_n[f,\mathbf{w}_n]>\bar{h}}} P_f(U_n \le u) \le \sup_{f\in\Sigma; h_n[f,\mathbf{w}_n]>\bar{h}} \frac{\mathrm{Var}_f[U_n]}{\big(E_f[U_n]-u\big)^2} = \sup_{f\in\Sigma; h_n[f,\mathbf{w}_n]>\bar{h}} \frac{\mathrm{Var}_f[U_n]}{\big(h_n[f,\mathbf{w}_n]-u\big)^2}.$$

En utilisant les conditions de la proposition et les inégalités du lemme 3.23, on obtient que pour certaines constantes C, C' indépendantes de $\bar{h}$,

$$\sup_{\substack{f\in\mathcal{F}_1(\rho)\\ h_n[f,\mathbf{w}_n]>\bar{h}}} P_f(U_n \le u) \le \sup_{f\in\Sigma; h_n[f,\mathbf{w}_n]>\bar{h}} \frac{C(1+h_n[f,\mathbf{w}_n])}{\big(h_n[f,\mathbf{w}_n]-u\big)^2} \le C\frac{1+\bar{h}}{\big(\bar{h}-u\big)^2} \le C'\bar{h}^{-1}. \tag{3.33}$$

Venons en au second sup dans (3.32). Soit $\delta_n > 0$ une suite tendant vers zéro. On vérifie immédiatement que

$$\begin{aligned} P_f(U_n \le u) &= P_f(h_n[f,\mathbf{w}_n] + U_{n,0} + U_{n,1} + (U_{n,2} - h_n[f,\mathbf{w}_n]) \le u) \\ &\le P_f(h_n[f,\mathbf{w}_n] + U_{n,0} \le u + \delta_n) + P_f(-U_{n,1} - (U_{n,2} - h_n[f,\mathbf{w}_n]) \ge \delta_n) \\ &\le F_{U_{0,n}}(u - h_n[f,\mathbf{w}_n] + \delta_n) + \frac{2Var_f(U_{n,1}) + 2Var_f(U_{n,2})}{\delta_n^2}, \end{aligned} \tag{3.34}$$

où $F_{U_{0,n}}(\cdot)$ est la fonction de répartition de $U_{0,n}$. D'une part, on sait d'après le lemme 3.24 que $U_{n,0}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$. Ceci entraîne que $F_{U_{0,n}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers Φ. Ainsi,

$$F_{U_{0,n}}(u - h_n[f,\mathbf{w}_n] + \delta_n) = \Phi(u - h_n[f,\mathbf{w}_n] + \delta_n) + o(1) = \Phi(u - h_n[f,\mathbf{w}_n]) + o(1) + \delta_n O(1).$$

D'autre part, au vu du lemme 3.23, $Var_f(U_{n,1}) + Var_f(U_{n,2}) = O(\|\Pi_{S_Q} f\|_4^4 + \|\Pi_{S_Q} f\|_2^2)$.

Alors on a,

$$\begin{aligned} \|\Pi_{S_Q} f\|_2^2 = \sum_{l \in S_Q} \theta_l^2 &\le \frac{1}{\zeta_n} \sum_{w_{l,n} \ge \zeta_n} w_{l,n} \theta_l^2 + \sum_{w_{l,n} < \zeta_n} \theta_l^2 \\ &\le \frac{\sqrt{2}\, h_n[f,\mathbf{w}_n]}{\zeta_n (m-1)} + \sup_{l \in S_Q : w_{l,n} < \zeta_n} c_l^{-1}. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Hölder on obtient $\|\Pi_{S_Q} f\|_4^4 \le \|\Pi_{S_Q} f\|_2^{2(p-4)/(p-2)} \|\Pi_{S_Q} f\|_p^{2p/(p-2)}$. Donc on a

$$\sup_{\substack{f \in \mathcal{F}_1(\rho) \\ h_n[f,\mathbf{w}_n] \le \bar{h}}} P_f(U_n \le u) \le \sup_{f \in \mathcal{F}_1(\rho)} \Phi(u - h_n[f,\mathbf{w}_n]) + o(1) + \delta_n O(1) + \frac{o(1)(\bar{h}^{(p-4)/(p-2)} + \bar{h})}{\delta_n^2}.$$

En choisissant $\bar{h}$ assez grand et en faisant tendre δ_n vers zéro suffisamment lentement on obtient le résultat désiré.

3.5.3 Preuve de la Proposition 3.6

En utilisant le théorème minimax de Kneser pour les formes bilinéaires [56], on peut interchanger le sup et l'inf comme suit :

$$\sup_{\substack{\mathbf{w} \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{L}} \\ \|\mathbf{w}\|_2 = 1}} \inf_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{L}} \\ \langle \mathbf{v}, \mathbf{c} \rangle \le 1, \langle \mathbf{v}, \mathbf{q} \rangle \ge \rho^2}} \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = \inf_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{L}} \\ \langle \mathbf{v}, \mathbf{c} \rangle \le 1, \langle \mathbf{v}, \mathbf{q} \rangle \ge \rho^2}} \sup_{\substack{\mathbf{w} \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{L}} \\ \|\mathbf{w}\|_2 = 1}} \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = \inf_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{L}} \\ \langle \mathbf{v}, \mathbf{c} \rangle \le 1, \langle \mathbf{v}, \mathbf{q} \rangle \ge \rho^2}} \|\mathbf{v}\|_2, \tag{3.35}$$

De plus, le tableau $\mathbf{w}^*$ atteignant le sup est donné par $w_l^* = v_l / \|\mathbf{v}\|_2$. Maintenant, la minimisation du côté droit de (3.35) fait intervenir une fonction coût convexe du second ordre $\|\mathbf{v}\|_2^2$ et des contraintes linéaires $v_l \ge 0$, $\langle \mathbf{v}, \mathbf{c} \rangle \le 1$ et $\langle \mathbf{v}, \mathbf{q} \rangle \le \rho^2$. Ainsi, d'après les conditions KKT, s'il existe $\mu, \lambda \ge 0$ et $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{L}}$ satisfaisant pour un certain $\mathbf{v}^* \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{L}}$ les conditions $2\mathbf{v}^* + \lambda \mathbf{c} - \mu \mathbf{q} - \boldsymbol{\nu} = 0$ et $\lambda(\langle \mathbf{v}^*, \mathbf{c} \rangle - 1) = 0$, $\mu(\langle \mathbf{v}^*, \mathbf{q} \rangle - \rho^2) = 0$ et $\nu_l v_l^* = 0$ pour tout l, alors $\mathbf{v}^*$ est une solution du problème de minimisation (3.35). Sous les conditions de la proposition, on vérifie aisément que ces conditions KKT sont satisfaites avec $\lambda = 2/\sum_l c_l (T_\rho q_l - c_l)_+$, $\mu = 2T_\rho / \sum_l c_l (T_\rho q_l - c_l)_+$ et $\nu_l = 2(c_l - T_\rho q_l)_+ / \sum_l c_l (T_\rho q_l - c_l)_+$.

3.5.4 Preuve du Théorème 3.7

Pour simplifier les notations, on pose $\mathcal{N}_{n,\gamma} = \mathcal{N}(T_{n,\gamma})$. On vérifie d'abord que sous les hypothèses du théorème toutes les conditions requises dans les Propositions 3.2 et 3.3 sont satisfaites. Puisque $\|\widehat{\mathbf{w}}_n^*\|_0 = |\mathcal{N}_{n,\gamma}|$ et $\|\widehat{\mathbf{w}}_n^*\|_\infty^2 \leq \max_{l\in\mathcal{N}_{n,\gamma}} q_l^2 / \sum_{l\in\mathcal{N}_{n,\gamma}} \big(q_l - \frac{c_l}{T_{n,\gamma}}\big)^2$, la condition **[C1]** implique la première condition de la Proposition 3.2. Les conditions **[C3]** et **[C4]** impliquent respectivement les secondes et troisièmes conditions de la Proposition 3.2. Finalement, la condition **[C6]** implique la quatrième condition de la Proposition 3.2. Ainsi, on a vérifié que sous les conditions du théorème, l'affirmation de la Proposition 3.2 est vraie. Pour vérifier que l'affirmation de la Proposition 3.3 est vraie aussi, il suffit de vérifer que la première hypothèse de cette proposition (la seconde étant identique à **[C7]**). En fait, il n'est pas difficile de vérifier que la première hypothèse de la Proposition 3.3 vient de **[C2]**, **[C4]** et **[C5]** pour la suite $\zeta_n^2 = \min_{l\in\mathcal{N}_{n,\gamma}} q_l^2/4\sum_{l\in\mathcal{N}_{n,\gamma}} q_l^2$.

En conséquence, en combinant les résultats des Propositions 3.2 et 3.3, on obtient

$$\gamma_n(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1(r_{n,\gamma}^*), \widehat{\phi}_n^*) \leq \Phi(-z_{1-\gamma/2}) + \Phi\big(z_{1-\gamma/2} - \inf_{f\in\mathcal{F}_1(r_{n,\gamma}^*)} h_n[f, \widehat{\mathbf{w}}_n^*]\big) + o(1). \quad (3.36)$$

Au vu de la Proposition 3.6, l'infimum sur f de $h_n[f, \widehat{\mathbf{w}}_n^*]$ peut être évalué comme suit :

$$\begin{aligned}
\inf_{f\in\mathcal{F}_1(r_{n,\gamma}^*)} h_n[f, \widehat{\mathbf{w}}_n^*] &= \Big(\frac{m(m-1)}{2}\Big)^{1/2} \inf_{\substack{\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{R}^{\mathcal{L}}: \sum_l c_l\theta_l^2 \leq 1 \\ \sum_l q_l\theta_l^2 \geq (r_{n,\gamma}^*)^2}} \sum_l \widehat{w}_{l,n}^* \theta_l^2 \\
&= \Big(\frac{m(m-1)}{2}\Big)^{1/2} \inf_{\substack{\mathbf{v}\in\mathbb{R}_+^{\mathcal{L}}: \langle \mathbf{v}, \mathbf{c}\rangle \leq 1 \\ \langle \mathbf{v}, \mathbf{q}\rangle \geq (r_{n,\gamma}^*)^2}} \langle \widehat{\mathbf{w}}_n^*, \mathbf{v}\rangle \\
&= \Big(\frac{m(m-1)}{2}\Big)^{1/2} \|\mathbf{v}^*\|_2 \\
&= \Big(\frac{m(m-1)}{2}\Big)^{1/2} \frac{\big(\sum_{l\in\mathcal{N}_{n,\gamma}} (T_{n,\gamma}q_l - c_l)^2\big)^{1/2}}{\sum_{l\in\mathcal{N}_{n,\gamma}} c_l(T_{n,\gamma}q_l - c_l)}.
\end{aligned}$$

En insérant cette expression dans (3.36) et en utilisant (3.15), on obtient que

$$\begin{aligned}
\gamma_n(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1(r_{n,\gamma}^*), \widehat{\phi}_n^*) &\leq \Phi(-z_{1-\gamma/2}) + \Phi\big(z_{1-\gamma/2} - 2z_{1-\gamma/2} + o(1)\big) + o(1) \\
&= 2\Phi(-z_{1-\gamma/2}) + o(1) = \gamma + o(1).
\end{aligned}$$

3.5.5 Preuve du Théorème 3.9

La preuve de la borne inférieure suit les pas de [50]. Cependant, on a considérablement modifié certaines étapes, ce qui nous a permis de relaxer certaines hypothèses et a donné une preuve plus courte.

Rappelons que $\boldsymbol{\theta}[f] = (\theta_l[f])_{l\in\mathcal{L}} \in \ell_2(\mathcal{L})$ est le tableau des coefficients d'une fonction dans $L_2(\Delta)$ par rapport au système $(\varphi_l)_{l\in\mathcal{L}}$. On introduit les ensembles $\Theta_1(\rho) = \{\boldsymbol{\theta} \in \ell_2(\mathcal{L}) : \langle \mathbf{c}, \boldsymbol{\theta}^2\rangle \leq 1,\ \langle \mathbf{q}, \boldsymbol{\theta}^2\rangle \geq \rho^2\}$ et $\Theta_0 = \{\boldsymbol{\theta} \in \ell(\mathcal{L}) : \langle \mathbf{c}, \boldsymbol{\theta}^2\rangle \leq 1,\ \langle \mathbf{q}, \boldsymbol{\theta}^2\rangle = 0\}$, où on a

utilisé la notation $\boldsymbol{\theta}^2 = \{\theta_l^2\}_{l\in\mathcal{L}}$. Clairement, si f appartient à la classe fonctionnelle $\mathcal{F}_1(\rho)$ (resp. $\mathcal{F}_0$) alors $\boldsymbol{\theta}[f] \in \Theta_1(\rho)$ (resp. $\boldsymbol{\theta}[f] \in \Theta_0$).

Soit $C < 1$ une constante. Notre but est de prouver que $\gamma_n(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1(Cr^*_{n,\gamma})) \geq \gamma + o(1)$. Pour obtenir cette borne inférieure, on définit des mesures a priori qui sont essentiellement concentrées sur les ensembles Θ_0 et Θ_1. Soit π_n^1 et π_n^2 des mesures sur l'espace $\ell_2(\mathcal{L})$ telles que $\pi_n^1(\Theta_0) = 1 + o(1)$ et $\pi_n^2(\Theta_1(Cr^*_{n,\gamma})) = 1 + o(1)$. Ces mesures a priori mènent aux probabilités suivantes :

$$P_{\pi_n^i}(A) = \int P_{\boldsymbol{\theta}}(A)\pi_n^i(d\boldsymbol{\theta}) \quad \text{pour tout ensemble mesurable } A \subset (\Delta\times\mathbb{R})^n, \quad i = 1, 2.$$

Si $\gamma_n(P_{\pi_n^1}, P_{\pi_n^2}) = \inf_{\psi:(\Delta\times\mathbb{R})^n\to\{1,2\}} \{P_{\pi_n^1}(\psi = 2) + P_{\pi_n^2}(\psi = 1)\}$ est la probabilité d'erreur totale minimale pour tester l'hypothèse nulle simple $H_0 : P = P_{\pi_n^1}$ contre l'alternative simple $H_1 : P = P_{\pi_n^2}$, alors on a (cf la Proposition 2.11 de [51])

$$\gamma_n(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1(Cr^*_{n,\gamma})) \geq \gamma_n(P_{\pi_n^1}, P_{\pi_n^2}) + o(1).$$

Comme le montre le prochain résultat, pour obtenir la borne inférieure désirée, il suffit de montrer que la log-vraisemblance Bayésienne $\log(dP_{\pi_n^2}/dP_{\pi_n^1})$ est asymptotiquement équivalente à la log-vraisemblance gaussienne.

Lemme 3.25 (Section 4.3.1 dans [51])**.** *S'il existe une suite déterministe u_n et une suite de variables aléatoires η_n telles que sous $P_{\pi_n^1}$ η_n converge en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$ et*

$$\log(dP_{\pi_n^2}/dP_{\pi_n^1}) = u_n\eta_n - \frac{u_n^2}{2} + o_P(1), \tag{3.37}$$

alors $\gamma_n(P_{\pi_n^1}, P_{\pi_n^2}) \geq 2\Phi(-u_n/2) + o(1)$.

Pour nos besoins, on choisit pour π_n^1 la mesure de Dirac en $\mathbf{0}$ et on note P_0 la probabilité correspondante $P_{\pi_n^1}$. Il est clair qu'avec ce choix $\pi_n^1(\Theta_0) = 1$. On explique maintenant comment π_n^2, que l'on va appeler π_n à partir de maintenant, est fabriquée. Soit $\boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{L}}$ un tableau contenant un nombre fini d'éléments non nuls. Soit $\mathcal{L}(\boldsymbol{a}_n)$ le support de $\boldsymbol{a}_n$, *i.e.*, $a_l \neq 0$ si et seulement si $l \in \mathcal{L}(\boldsymbol{a}_n)$. On suppose que $\mathcal{L}(\boldsymbol{a}_n) \subset S_Q$ et on définit $\pi_n(d\boldsymbol{\theta})$ comme la mesure produit gaussienne telle que sous π_n les éléments θ_l sont indépendants gaussiens de moyenne nulle et de variance a_l.

Proposition 3.26. *Soit $\delta \in (0,1)$ tel que $1 - \delta \geq C$. Supposons que $\boldsymbol{a}_n = (1-\delta)\mathbf{v}_n$ et, quand $n \to \infty$, les hypothèses suivantes sont satisfaites :*

[L1] $\langle \mathbf{c}, \mathbf{v}_n\rangle \leq 1$ *et* $\langle \mathbf{q}, \mathbf{v}_n\rangle \geq (r^*_{n,\gamma})^2$,

[L2] $\max_{l\in\mathcal{L}(\mathbf{v}_n)}(q_l v_l) = o(\langle \mathbf{q}, \mathbf{v}\rangle)$ *et* $\max_{l\in\mathcal{L}(\mathbf{v}_n)}(c_l v_l) = o(\langle \mathbf{c}, \mathbf{v}\rangle)$,

[L3] $\|\mathbf{v}_n\|_0 \to \infty$ *et* $n\|\mathbf{v}_n\|_\infty^2\|\mathbf{v}_n\|_0^2 \log\|\mathbf{v}_n\|_0 \to 0$,

[L4] $n\|\mathbf{v}_n\|_\infty\|\mathbf{v}_n\|_0^{1/3} \to 0$ *et* $\|\mathbf{v}_n\|_3 = o(\|\mathbf{v}_n\|_2)$.

[L5] *Pour un certain $L_5 > 0$, on a $\sum_{l\in\mathcal{L}(\boldsymbol{a}_n)} \varphi_l^2(\mathbf{t}) \leq L_5\|\boldsymbol{a}_n\|_0$.*

Alors, quand $n \to \infty$,

$$\gamma_n(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1(Cr^*_{n,\gamma})) \geq 2\Phi\Big(-\frac{n(1-\delta)}{2\sqrt{2}}\|\mathbf{v}_n\|_2\Big) + o(1). \tag{3.38}$$

Démonstration. La preuve de cette proposition va être menée à l'aide de plusieurs lemmes. Le fait que $\pi_n(\Theta_1(Cr^*_{n,\gamma})) = 1 + o(1)$ est prouvé dans le lemme suivant.

Lemme 3.27. *Supposons que* $\boldsymbol{a}_n = (1-\delta)\mathbf{v}_n$ *satisfait* **[L1]** *et* **[L2]**. *Alors, pour tout* $\delta \in (0,1)$, *on a* $\pi_n(\Theta_1(Cr^*_n)) = 1 + o(1)$.

Démonstration. Notons $\mathcal{H}_1(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{l\in\mathcal{L}} q_l\theta_l^2$ et $\mathcal{H}_2(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{l\in\mathcal{L}} c_l\theta_l^2$. Au vu de **[L1]**, on a

$$\int \mathcal{H}_1(\boldsymbol{\theta})\pi_n(d\boldsymbol{\theta}) = \sum_{l\in\mathcal{L}} q_l a_l \geq (r^*_{n,\gamma})^2(1-\delta), \qquad \int \mathcal{H}_2(\boldsymbol{\theta})\pi_n(d\boldsymbol{\theta}) = \sum_{l\in\mathcal{L}} c_l a_l \leq 1-\delta.$$

D'un autre côté, puisque la variance de la somme de variables aléatoires indépendantes est égale à la somme des variances de ces variables aléatoires, on obtient

$$\int \mathcal{H}_1(\boldsymbol{\theta})^2\pi_n(d\boldsymbol{\theta}) - \Big(\int \mathcal{H}_1(\boldsymbol{\theta})\pi_n^{\pi}(d\boldsymbol{\theta})\Big)^2 = 2\sum_{l\in\mathcal{L}} q_l^2 a_l^2 \leq 2\langle \mathbf{q}, \boldsymbol{a}_n\rangle \max_{l\in\mathcal{L}(\boldsymbol{a}_n)}(q_l a_l).$$

Par l'inégalité de Tchebychev, on arrive à

$$\pi_n(\boldsymbol{\theta} : \mathcal{H}_1(\boldsymbol{\theta}) < (Cr^*_{n,\gamma})^2) \leq \frac{2\max_{l\in\mathcal{L}(\mathbf{v}_n)}(q_l v_l)}{C^2(1-C)^2\langle \mathbf{q}, \mathbf{v}_n\rangle},$$
$$\pi_n(\boldsymbol{\theta} : \mathcal{H}_2(\boldsymbol{\theta}) > 1) \leq \frac{2\max_{l\in\mathcal{L}(\mathbf{v}_n)}(c_l v_l)}{\delta^2\langle \mathbf{c}, \mathbf{v}_n\rangle}.$$

L'affirmation du lemme vient maintenant de la condition **[L2]**. □

Ensuite, on montre que pour tout $p > 2$ et tout $L > 0$, la probabilité $\pi_n(\boldsymbol{\theta} : \|\sum_l \theta_l\varphi_l\|_p > L)$ tend vers zéro. En effet, au vu de la l'inégalité de Tchebychev et du théorème de Fubini.

$$\pi_n\Big(\boldsymbol{\theta} : \Big\|\sum\nolimits_l \theta_l\varphi_l\Big\|_p > L\Big) \leq L^{-p}\int_\Delta E_{\pi_n}\Big[\Big|\sum_l \theta_l\varphi_l(\mathbf{t})\Big|^p\Big]\,d\mathbf{t}.$$

En utilisant le fait que pour tout $\mathbf{t}$ fixé, la variable aléatoire $\sum_l \theta_l\varphi_l(\mathbf{t})$ est gaussienne de moyenne nulle et de variance $\sum_l a_l\varphi_l^2(\mathbf{t})$, on obtient

$$\pi_n\Big(\boldsymbol{\theta} : \Big\|\sum\nolimits_l \theta_l\varphi_l\Big\|_p > L\Big) \leq p!L^{-p}\int_\Delta \Big|\sum_l a_l\varphi_l^2(\mathbf{t})\Big|^{p/2}\,d\mathbf{t} \leq p!L_5^{p/2}L^{-p}(\|\boldsymbol{a}_n\|_\infty\|\boldsymbol{a}_n\|_0)^{p/2}.$$

La dernière expression tend vers zéro quand $n \to \infty$ au vu de la condition **[L3]**.

On se concentre maintenant sur la preuve de (3.37). Posons $m = |\mathcal{L}(\boldsymbol{a}_n)|$ et soit Φ_n la matrice $m\times n$ ayant comme élément générique $(\Phi_n)_{li} = \varphi_l(\mathbf{t}_i)$. Soit $\mathtt{A}_n$ la matrice diagonale $m\times m$ ayant les éléments non nuls de $\boldsymbol{a}_n$ sur sa diagonale pincipale. Il est clair que sous P_{π_n}, conditionnellement à $\mathcal{T}_n$, $\boldsymbol{x} = (x_1,\ldots,x_n)^\top$ suit une distribution gaussienne multivariée de moyenne nulle et de matrice de covariance la matrice $n\times n$ $\mathtt{R}_n = \Phi_n^\top\mathtt{A}_n\Phi_n + \mathtt{I}_n$. Donc, le logarithme de sa densité par rapport à P_0 est donné par

$$\log\Big(\frac{dP_{\pi_n}}{dP_0}(\boldsymbol{x};\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n)\Big) = -\frac{1}{2}\big(\log\det\mathtt{R}_n + \boldsymbol{x}^\top(\mathtt{R}_n^{-1} - \mathtt{I}_n)\boldsymbol{x}\big).$$

Dans ce qui suit, on note $|\!|\!|\mathtt{M}|\!|\!| = \sup_{\|\boldsymbol{x}\|_2=1}\|\mathtt{M}\boldsymbol{x}\|_2$ la norme spectrale d'une matrice $\mathtt{M}$.

Lemme 3.28. *Soit* $\bar{\mathtt{R}}_n = n\mathtt{A}_n + \mathtt{I}_m$ *et* $m = m_n \to \infty$. *Si* $n^2\|\boldsymbol{a}_n\|_\infty^2\|\boldsymbol{a}_n\|_0 \|\!|\frac{1}{n}\Phi_n\Phi_n^\top - \mathtt{I}_m|\!\|^2 = o_P(1)$ *et* $|\mathrm{trace}[\bar{\mathtt{R}}_n^{-1}\mathtt{B}_n]| + E[|\boldsymbol{\xi}^\top\bar{\mathtt{R}}_n^{-1}\mathtt{B}_n\bar{\mathtt{R}}_n^{-1}\boldsymbol{\xi}|] = o_P(1)$, *alors sous* P_0 *on a* $\log(dP_{\pi_n}/dP_0) = -\frac{1}{2}(\log\det\bar{\mathtt{R}}_n + \boldsymbol{\xi}^\top(\bar{\mathtt{R}}_n^{-1} - \mathtt{I}_m)\boldsymbol{\xi}) + o_P(1)$, *où* $\boldsymbol{\xi} \sim \mathcal{N}_m(0, \mathtt{I}_m)$.

Démonstration. Notons $\tilde{\mathtt{R}}_n = \mathtt{A}_n^{1/2}\Phi_n\Phi_n^\top\mathtt{A}_n^{1/2} + \mathtt{I}_m$, $\mathtt{B}_n = \tilde{\mathtt{R}}_n - \bar{\mathtt{R}}_n$ et introduisons la fonction $g(z) = \log\det(\bar{\mathtt{R}}_n + z\mathtt{B}_n)$ pour $z \in [0,1]$. On vérifie aisément (en utilisant le fait que $(-\lambda)^n\det(PR - \lambda\mathtt{I}_m) = (-\lambda)^m\det(RP - \lambda\mathtt{I}_n)$ pour une matrice $m \times n$ P, une matrice $n \times m$ R et un réel λ) que $g(1) = \log\det\tilde{\mathtt{R}}_n = \log\det\mathtt{R}_n$, $g(0) = \log\det\bar{\mathtt{R}}_n$ et $g'(z) = \mathrm{trace}[(\bar{\mathtt{R}}_n + z\mathtt{B}_n)^{-1}\mathtt{B}_n]$. Ainsi, la relation $g(1) - g(0) = g'(\bar{z})$ pour un certain $\bar{z} \in [0,1]$ implique que

$$\begin{aligned}|\log\det\mathtt{R}_n - \log\det\bar{\mathtt{R}}_n| &= |\mathrm{trace}[(\bar{\mathtt{R}}_n + \bar{z}\mathtt{B}_n)^{-1}\mathtt{B}_n]| \\ &\le |\mathrm{trace}[\bar{\mathtt{R}}_n^{-1}\mathtt{B}_n]| + m\|\!|(\bar{\mathtt{R}}_n + \bar{z}\mathtt{B}_n)^{-1} - \bar{\mathtt{R}}_n^{-1}|\!\|\,\|\!|\mathtt{B}_n|\!\|.\end{aligned}$$

En utilisant l'identité $(\bar{\mathtt{R}}_n + \bar{z}\mathtt{B}_n)^{-1} - \bar{\mathtt{R}}_n^{-1} = -\bar{z}(\bar{\mathtt{R}}_n + \bar{z}\mathtt{B}_n)^{-1}\mathtt{B}_n\bar{\mathtt{R}}_n^{-1}$, on obtient

$$\begin{aligned}|\log\det\mathtt{R}_n - \log\det\bar{\mathtt{R}}_n| &\le |\mathrm{trace}[\bar{\mathtt{R}}_n^{-1}\mathtt{B}_n]| + m\|\!|(\bar{\mathtt{R}}_n + \bar{z}\mathtt{B}_n)^{-1}|\!\|\,\|\!|\bar{\mathtt{R}}_n^{-1}|\!\|\,\|\!|\mathtt{B}_n|\!\|^2 \\ &\le |\mathrm{trace}[\bar{\mathtt{R}}_n^{-1}\mathtt{B}_n]| + m\|\!|\mathtt{B}_n|\!\|^2,\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $\bar{\mathtt{R}}_n$ et $\bar{\mathtt{R}}_n + \bar{z}\mathtt{B}_n = \mathtt{I}_m + \bar{z}\mathtt{A}_n^{1/2}\Phi_n\Phi_n^\top\mathtt{A}_n^{1/2} + (1-\bar{z})n\mathtt{A}_n$ ont toutes leurs valeurs propres ≥ 1. D'autre part, on peut vérifier que $\|\!|\mathtt{B}_n|\!\| \le n\|\!|\mathtt{A}_n|\!\|\,\|\!|\frac{1}{n}\Phi\Phi^\top - \mathtt{I}_m|\!\|$. En combinant ces inégalités avec le fait que $\|\!|\mathtt{A}_n|\!\| = \|\boldsymbol{a}_n\|_\infty$ et $m = \|\boldsymbol{a}_n\|_0 \to \infty$ on arrive à $\log\det\mathtt{R}_n = \log\det\bar{\mathtt{R}}_n + o_P(1)$.

Le terme $\boldsymbol{x}^\top\mathtt{R}_n^{-1}\boldsymbol{x}$ est traité de la même manière. On utilise la décomposition en valeurs singulières de la matrice $\mathtt{A}_n^{1/2}\Phi_n$:

$$\mathtt{A}_n^{1/2}\Phi_n = \mathtt{U}_n\mathtt{D}_n\mathtt{V}_n^\top$$

avec $\mathtt{U}_n$ une matrice unitaire $m \times m$, $\mathtt{D}_n$ une matrice $m \times n$ dont les m premiers coefficients diagonaux $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ sont des réels positifs ou nuls et tous les autres coefficients sont nuls, et $\mathtt{V}_n$ une matrice unitaire $n \times n$. On a alors

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}^\top(\mathtt{R}_n^{-1} - \mathtt{I}_n)\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x}^\top\big[(\mathtt{V}_n\mathtt{D}_n^\top\mathtt{D}_n\mathtt{V}_n^\top + \mathtt{I}_n)^{-1} - \mathtt{I}_n\big]\boldsymbol{x} \\ &= \boldsymbol{x}^\top\mathtt{V}_n\big[(\mathtt{D}_n^\top\mathtt{D}_n + \mathtt{I}_n)^{-1} - \mathtt{I}_n\big]\mathtt{V}_n^\top\boldsymbol{x} \\ &= \boldsymbol{x}^\top\mathtt{V}_n\mathtt{C}_n\mathtt{V}_n^\top\boldsymbol{x}\end{aligned}$$

où $\mathtt{C}_n$ est la matrice $n \times n$ dont les m premiers termes diagonaux sont $\mu_i = (\lambda_i^2 + 1)^{-1} - 1$ pour $i = 1, \ldots, m$ et dont tous les autres coefficients sont nuls.

Si on note $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ le vecteur $\mathtt{V}_n^\top \boldsymbol{x}$, on obtient :

$$\boldsymbol{x}^\top(\mathtt{R}_n^{-1} - \mathtt{I}_n)\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^m \mu_i y_i^2.$$

D un autre côté on a

$$\begin{aligned}\tilde{\mathtt{R}}_n^{-1} - \mathtt{I}_m = \mathtt{U}_n\big[(\mathtt{D}_n\mathtt{D}_n^\top + \mathtt{I}_m)^{-1} - \mathtt{I}_m\big]\mathtt{U}_n^\top \\ = \mathtt{U}_n \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_m)\mathtt{U}_n^\top\end{aligned}$$

Ainsi, si on pose $\boldsymbol{\xi} = \mathtt{U}_n^\top(y_1, \ldots, y_m)$ on a $\boldsymbol{\xi} \sim \mathcal{N}_m(0, \mathtt{I}_m)$ et $\boldsymbol{x}^\top(\mathtt{R}_n^{-1} - \mathtt{I}_n)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi}^\top(\tilde{\mathtt{R}}_n^{-1} - \mathtt{I}_m)\boldsymbol{\xi}$. Alors, on introduit la fonction $\bar{g}(z) = \boldsymbol{\xi}^\top[\bar{\mathtt{R}}_n + z\mathtt{B}_n]^{-1}\boldsymbol{\xi}$, dont la dérivée est donnée par $g'(z) = -\boldsymbol{\xi}^\top(\bar{\mathtt{R}}_n + z\mathtt{B}_n)^{-1}\mathtt{B}_n(\bar{\mathtt{R}}_n + z\mathtt{B}_n)^{-1}\boldsymbol{\xi}$. Ainsi, pour un certain $\bar{z} \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{\xi}^\top\tilde{\mathtt{R}}_n^{-1}\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}^\top\bar{\mathtt{R}}_n^{-1}\boldsymbol{\xi}| &= |\boldsymbol{\xi}^\top(\bar{\mathtt{R}}_n + \bar{z}\mathtt{B}_n)^{-1}\mathtt{B}_n(\bar{\mathtt{R}}_n + \bar{z}\mathtt{B}_n)^{-1}\boldsymbol{\xi}| \\ &\le |\boldsymbol{\xi}^\top\bar{\mathtt{R}}_n^{-1}\mathtt{B}_n\bar{\mathtt{R}}_n^{-1}\boldsymbol{\xi}| + |\boldsymbol{\xi}^\top[(\bar{\mathtt{R}}_n + \bar{z}\mathtt{B}_n)^{-1} - \bar{\mathtt{R}}_n^{-1}]\mathtt{B}_n(\bar{\mathtt{R}}_n + \bar{z}\mathtt{B}_n)^{-1}\boldsymbol{\xi}| \\ &\quad + |\boldsymbol{\xi}^\top[(\bar{\mathtt{R}}_n + \bar{z}\mathtt{B}_n)^{-1} - \bar{\mathtt{R}}_n^{-1}]\mathtt{B}_n\bar{\mathtt{R}}_n^{-1}\boldsymbol{\xi}| \\ &\le |\boldsymbol{\xi}^\top\bar{\mathtt{R}}_n^{-1}\mathtt{B}_n\bar{\mathtt{R}}_n^{-1}\boldsymbol{\xi}| \\ &\quad + \|\boldsymbol{\xi}\|_2^2\|(\bar{\mathtt{R}}_n + \bar{z}\mathtt{B}_n)^{-1} - \bar{\mathtt{R}}_n^{-1}\|\|\mathtt{B}_n\| \\ &\quad \times (\|(\bar{\mathtt{R}}_n + \bar{z}\mathtt{B}_n)^{-1}\| + \|\bar{\mathtt{R}}_n^{-1}\|).\end{aligned}$$

Or $\|(\bar{\mathtt{R}}_n + \bar{z}\mathtt{B}_n)^{-1} - \bar{\mathtt{R}}_n^{-1}]\| \le \|\mathtt{B}_n\|$ et $\|(\bar{\mathtt{R}}_n + \bar{z}\mathtt{B}_n)^{-1}\|$ et $\|\bar{\mathtt{R}}_n^{-1}\|$ sont majorées par 1. Ainsi

$$|\boldsymbol{\xi}^\top\tilde{\mathtt{R}}_n^{-1}\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}^\top\bar{\mathtt{R}}_n^{-1}\boldsymbol{\xi}| \le |\boldsymbol{\xi}^\top\bar{\mathtt{R}}_n^{-1}\mathtt{B}_n\bar{\mathtt{R}}_n^{-1}\boldsymbol{\xi}| + 2\|\boldsymbol{\xi}\|_2^2\|\mathtt{B}_n\|^2.$$

Il est bien connu que $\|\boldsymbol{\xi}\|_2^2$ suivant une loi du χ_m^2 est un $O_P(m)$, quand $m \to \infty$. Ceci complète la preuve du lemme. □

D'après [84, Cor. 5.52], sous **[C3]**, on a $\|\frac{1}{n}\Phi_n\Phi_n^\top - \mathtt{I}_m\| \le C(\frac{m\log m}{n})^{1/2}$ avec une probabilité supérieure à $1 - 1/n$.

On montre maintenant que

$$E|\mathrm{trace}[\bar{\mathtt{R}}_n^{-1}\mathtt{B}_n]|^2 + E[|\boldsymbol{\xi}^\top\bar{\mathtt{R}}_n^{-1}\mathtt{B}_n\bar{\mathtt{R}}_n^{-1}\boldsymbol{\xi}|^2] \le 7L_5^2 n\|\mathbf{v}_n\|_\infty^2\|\mathbf{v}_n\|_0^2.$$

En utilisant le fait que $\bar{\mathtt{R}}_n$ est une matrice diagonale avec des éléments diagonaux ≥ 1, on obtient $E|\mathrm{trace}[\bar{\mathtt{R}}_n^{-1}\mathtt{B}_n]|^2 \le E\mathrm{trace}[\mathtt{B}_n]^2$.

Or $\mathrm{trace}[\mathtt{B}_n] = \mathrm{trace}[\mathtt{A}_n(\Phi_n\Phi_n^\top - n\mathtt{I}_m)] = \sum_l a_l(\sum_{i=1}^n \varphi_l^2(\mathbf{t}_i) - n)$. Puis en utilisant le fait que la variance de la somme de variables aléatoires indépendantes est égale à la somme des variances,

$$E\mathrm{trace}[\mathtt{B}_n]^2 = nE\Big(\sum_l a_l(\varphi_l^2(\mathbf{t}_1) - 1)\Big)^2 \le L_5^2 n\|\boldsymbol{a}_n\|_\infty^2\|\boldsymbol{a}_n\|_0^2.$$

Quant au deuxième terme, on obtient, en posant $\boldsymbol{y} = \bar{\mathtt{R}}_n^{-1}\mathtt{A}_n^{1/2}\boldsymbol{\xi}$,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\xi}^\top\bar{\mathtt{R}}_n^{-1}\mathtt{B}_n\bar{\mathtt{R}}_n^{-1}\boldsymbol{\xi} &= \boldsymbol{y}^\top(\Phi_n\Phi_n^\top - n\mathtt{I}_m)\boldsymbol{y}\\ &= \sum_{l,l'} y_l y_{l'}\big(\sum_i \varphi_l(\mathbf{t}_i)\varphi_{l'}(\mathbf{t}_i) - n\delta_{ll'}\big)\\ &= \sum_i Z_i\end{aligned}$$

où les $Z_i = \sum_{l,l'} y_l y_{l'}(\varphi_l(\mathbf{t}_i)\varphi_{l'}(\mathbf{t}_i) - \delta_{ll'})$ sont des variables centrées et iid. On a aussi $y_l = \lambda_l\xi_l$ avec $|\lambda_l|^2 \le |a_l|$. On obtient donc

$$\begin{aligned}E[\boldsymbol{\xi}^\top\bar{\mathtt{R}}_n^{-1}\mathtt{B}_n\bar{\mathtt{R}}_n^{-1}\boldsymbol{\xi}]^2 &\le nE\Big(\sum_l y_l\varphi_l(\mathbf{t}_1)\Big)^4\\ &= nE\Big(\sum_l y_l^4\varphi_l^4(\mathbf{t}_1) + 6\sum_{l\neq l'} y_l^2\varphi_l^2(\mathbf{t}_1)y_{l'}^2\varphi_{l'}^2(\mathbf{t}_1)\Big)\\ &\le 6n\|a\|_\infty^2 E\Big(\sum_l y_l^2\varphi_l^2(\mathbf{t}_1)\Big)^2\\ &\le 6L_5^2 n\|a\|_0^2\|a\|_\infty^2.\end{aligned}$$

La dernière inégalité vient de **[L5]**. Donc, la condition **[L3]** implique que les deux conditions du dernier lemme sont satisfaites et, en conséquence, son assertion est vraie. En utilisant le fait que $\mathtt{A}_n$ est diagonal, on obtient,

$$\begin{aligned}\log\left(dP_{\pi_n}/dP_0\right) &= \frac{1}{2}\sum_l\Big(\frac{na_l\xi_l^2}{na_l+1} - \log(na_l+1)\Big) + o_P(1)\\ &= \frac{1}{2}\sum_l\Big(\frac{na_l}{na_l+1} - \log(na_l+1)\Big) + \sum_l\frac{na_l(\xi_l^2-1)}{2(na_l+1)} + o_P(1).\end{aligned} \tag{3.39}$$

Lemme 3.29. *Notons*

$$u_n = \frac{n\|\boldsymbol{a}_n\|_2}{\sqrt{2}}, \quad \eta_n = \frac{1}{u_n}\sum_{l\in\mathcal{L}}\frac{na_l(\xi_l^2-1)}{2(na_l+1)}.$$

Si les conditions $mn^3\|\boldsymbol{a}_n\|_\infty^3 \to 0$, et $\|\boldsymbol{a}_n\|_3 = o(\|\boldsymbol{a}_n\|_2)$ sont remplies, alors η_n converge en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$ et

$$\frac{1}{2}\sum_{l\in\mathcal{L}}\Big(\frac{na_l}{na_l+1} - \log(na_l+1)\Big) + \sum_{l\in\mathcal{L}}\frac{na_l(\xi_l^2-1)}{2(na_l+1)} = u_n\eta_n - \frac{u_n^2}{2} + o(1). \tag{3.40}$$

Démonstration. Puisque $n\|\boldsymbol{a}\|_\infty \to 0$, on a $\frac{na_l}{na_l+1} = na_l - (na_l)^2 + O((na_l)^3)$ et $\log(na_l+1) = na_l - \frac{(na_l)^2}{2} + O((na_l)^3)$. Ceci implique que $\sum_{l\in\mathcal{L}}\left(\frac{na_l}{na_l+1} - \log(na_l+1)\right) = -\frac{1}{2}u_n^2 + O(mn^3\|\boldsymbol{a}_n\|_\infty^3)$. D'autre part, en utilisant le théorème central limite pour les tableaux triangulaires, on obtient la convergence faible de η_n vers $\mathcal{N}(0,1)$ pourvu que $u_n^{-3}\sum_l(na_l)^3/(na_l+1)^3$ tend vers zéro. Puisque sous les conditions du lemme cette convergence se produit trivialement, on obtient l'affirmation du lemme. □

En combinant le lemme 3.25 avec (3.39) et (3.40), on obtient (3.38) et la proposition suit. □

Pour compléter la preuve du Théorème 3.9, on va montrer maintenant que si on choisit $T_{n,\gamma}$ comme dans le Théorème 3.7 et si on définit $\mathbf{v}_n$ par

$$v_l = v_{l,n} = \frac{(T_{n,\gamma} q_l - c_l)_+}{\sum_{l\in\mathcal{L}} c_l (T_{n,\gamma} q_l - c_l)_+},$$

alors toutes les conditions de la Proposition 3.26 sont remplies. On commence par remarquer que **[L1]** est immédiat. Pour vérifier la première relation dans **[L2]**, on utilise **[C1]** et $|\mathcal{N}(T_{n,\gamma})| \to \infty$, avec les évaluations suivantes :

$$\forall l \in \mathcal{N}(T_{n,\gamma}), \qquad \frac{q_l v_l}{\langle \mathbf{q}, \mathbf{v}\rangle} = \frac{q_l (T_{n,\gamma} q_l - c_l)}{\sum_l q_l (T_{n,\gamma} q_l - c_l)_+} \le \frac{q_l^2}{\sum_l (q_l - \frac{c_l}{T_{n,\gamma}})_+^2} \le \frac{C_1}{|\mathcal{N}(T_{n,\gamma})|}.$$

Pour la seconde relation dans **[L2]**, au vu de (3.15), $\forall l \in \mathcal{N}(T_{n,\gamma})$ on a

$$\begin{aligned}\frac{c_l v_l}{\langle \mathbf{c}, \mathbf{v}\rangle} &= \frac{c_l (T_{n,\gamma} q_l - c_l)}{\sum_l c_l (T_{n,\gamma} q_l - c_l)_+} \le \frac{T_{n,\gamma} c_l q_l}{\sum_l c_l (T_{n,\gamma} q_l - c_l)_+} \\ &\le \frac{T_{n,\gamma} c_l q_l \, O(1)}{n T_{n,\gamma} \big(\sum_l (q_l - \frac{c_l}{T_{n,\gamma}})_+^2\big)^{1/2}} \le \frac{\max_{l\in\mathcal{N}(T_{n,\gamma})} c_l}{n |\mathcal{N}(T_{n,\gamma})|^{1/2}} \, O(1).\end{aligned}$$

Le dernier terme tend vers zéro à cause de **[C9]**. De la définition de $\mathbf{v}_n$, de l'équation (3.15) et de la condition **[C1]** on peut déduire que

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}_n\|_\infty = \frac{\max_l (T_{n,\gamma} q_l - c_l)_+}{\sum_l c_l (T_{n,\gamma} q_l - c_l)_+} &\le \frac{T_{n,\gamma} \max_l q_l}{n \big(\sum_l (T_{n,\gamma} q_l - c_l)_+^2\big)^{1/2}} O(1) \\ &\le \frac{\max_l q_l}{n |\mathcal{N}(T_{n,\gamma})|^{1/2} \max_l q_l} O(1) = \frac{O(1)}{n |\mathcal{N}(T_{n,\gamma})|^{1/2}}.\end{aligned}$$

Cette inégalité donne $n\|\mathbf{v}_n\|_\infty^2 \|\mathbf{v}_n\|_0^2 = O(|\mathcal{N}(T_{n,\gamma})|/n)$. Ainsi, **[L3]** vient de **[C8]**. Finalement, pour vérifer que **[L4]** est vraie, on remarque que $n\|\mathbf{v}_n\|_\infty \|\mathbf{v}_n\|_0^{1/3} = O(|\mathcal{N}(T_{n,\gamma})|^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}) = o(1)$ et

$$\frac{\|\mathbf{v}_n\|_3^3}{\|\mathbf{v}_n\|_2^3} = \frac{\sum_l (T_{n,\gamma} q_l - c_l)_+^3}{\big(\sum_l (T_{n,\gamma} q_l - c_l)_+^2\big)^{3/2}} \le \frac{\max_l q_l}{\big(\sum_l (q_l - \frac{c_l}{T_{n,\gamma}})_+^2\big)^{1/2}} \le \frac{C_1^{1/2}}{|\mathcal{N}(T_{n,\gamma})|^{1/2}}.$$

Ainsi, toutes les conditions de la Proposition 3.26 sont satisfaites et donc

$$\gamma_n(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1(C r^*_{n,\gamma})) \ge 2\Phi\Big(-\frac{n(1-\delta)}{2\sqrt{2}} \|\mathbf{v}_n\|_2\Big) + o(1).$$

Puisque cette équation est vraie pour tout $\delta \in (0, 1-C)$, elle est aussi vraie pour $\delta = 0$, et l'affirmation du Théorème 3.9 vient de (3.15).

3.6 Preuves des lemmes et des propositions de la Section 3.3

3.6.1 Preuve du lemme 3.11

Ecrivons $\Pi f = \Pi_1 f + \Pi_2 f$, où Π_1 et Π_2 sont les projecteurs orthogonaux dans $L_2(\Delta)$ sur les sous-espaces $\mathrm{span}\{\varphi_l : l \in \mathcal{N}_1(T)\}$ et $\mathrm{span}\{\varphi_l : l \in \mathcal{N}_2(T)\}$, respectivement. On suppose d'abord que l'inégalité $\sum_l c_l^{-1} < \infty$ est satisfaite.

D'une part, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}\|\Pi_2 f\|_4^4 &= \int_\Delta \Big(\sum\nolimits_{l\in\mathcal{N}_2(T)} \theta_l[f]\varphi_l(\mathbf{t})\Big)^4 d\mathbf{t} \le 2^{2d}\Big(\sum\nolimits_{l\in\mathcal{N}_2(T)} |\theta_l[f]|\Big)^4 \\ &\le 2^{2d}\Big(\sum\nolimits_{l\in\mathcal{N}_2(T)} c_l\theta_l[f]^2\Big)^2\Big(\sum\nolimits_{l\in\mathcal{N}_2(T)} c_l^{-1}\Big)^2 \le 2^{2d}\Big(\sum\nolimits_{l\in\mathcal{N}_2(T)} c_l^{-1}\Big)^2.\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\|\Pi_1 f - \widehat{\Pi f}_n\|_4^4 &= \int_\Delta \Big(\sum_{l\in\mathcal{N}_1(T)} (\widehat{\theta}_l - \theta_l[f])\varphi_l(\mathbf{t})\Big)^4 d\mathbf{t} \\ &= \int_\Delta \Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \sum_{l\in\mathcal{N}_1(T)} (x_i\varphi_l(\mathbf{t}_i) - \theta_l[f])\varphi_l(\mathbf{t})\Big)^4 d\mathbf{t}.\end{aligned}$$

En utilisant le théorème de Fubini et l'inégalité de Rosenthal, pour une certaine constante $C > 0$, on obtient

$$\begin{aligned}E_f\|\Pi_1 f - \widehat{\Pi f}_n\|_4^4 \le{}& \frac{C}{n^4}\int_\Delta \sum_{i=1}^n E_f\Big(\sum_{l\in\mathcal{N}_1(T)} (x_i\varphi_l(\mathbf{t}_i) - \theta_l[f])\varphi_l(\mathbf{t})\Big)^4 d\mathbf{t} \\ &+ \frac{C}{n^4}\int_\Delta \Big\{\sum_{i=1}^n E_f\Big(\sum_{l\in\mathcal{N}_1(T)} (x_i\varphi_l(\mathbf{t}_i) - \theta_l[f])\varphi_l(\mathbf{t})\Big)^2\Big\}^2 d\mathbf{t}\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}E_f\Big(\sum_{l\in\mathcal{N}_1(T)} (x_i\varphi_l(\mathbf{t}_i) - \theta_l[f])\varphi_l(\mathbf{t})\Big)^4 &\le |\mathcal{N}_1(T)|^3 \sum_{l\in\mathcal{N}_1(T)} E_f\big(x_i\varphi_l(\mathbf{t}_i) - \theta_l[f]\big)^4\varphi_l(\mathbf{t})^4 \\ &\le 2^{2d}|\mathcal{N}_1(T)|^3 \sum_{l\in\mathcal{N}_1(T)} E_f\big(f(\mathbf{t}_i)\varphi_l(\mathbf{t}_i) + \xi_i\varphi_l(\mathbf{t}_i) - \theta_l[f]\big)^4 \\ &= O(|\mathcal{N}_1(T)|^4),\end{aligned}$$

où on a utlisé le fait que $E[\xi^4] < \infty$ et que $E[f(t_i)^4] \le 2^{2d}(\sum_l c_l^{-1})^2 < \infty$ sous les conditions du lemme. Des arguments similaires mènent à

$$\int_\Delta \Big\{\sum_{i=1}^n E_f\Big(\sum_{l\in\mathcal{N}_1(T)} (x_i\varphi_l(\mathbf{t}_i) - \theta_l[f])\varphi_l(\mathbf{t})\Big)^2\Big\}^2 d\mathbf{t} = O(n^2|\mathcal{N}_1(T)|^4),$$

ce qui implique que $E_f\|\Pi_1 f - \widehat{\Pi f}_n\|_4^4 = O(|\mathcal{N}_1(T)|^4/n^2)$. En combinant les évaluations obtenues, on arrive à

$$E_f\|\Pi f - \widehat{\Pi f}_n\|_4^4 \le \frac{|\mathcal{N}_1(T)|^4}{n^2} + C\Big(\sum\nolimits_{l:c_l>T} c_l^{-1}\Big)^2.$$

La consistance requise vient de l'hypothèse $|\mathcal{N}_1(T_n)| = o(n^{1/2})$.

Considérons le cas $\Sigma \subset W_2^{\boldsymbol{\sigma}}(R)$. Sans perte de généralité, on va supposer que $\Sigma = W_2^{\boldsymbol{\sigma}}(R)$ et $c_l = \sum_{i=1}^d (2\pi l_i)^{2\sigma_i}/R^2$. Les calculs sont les mêmes que dans le cas précédent mais le terme $\|\Pi_2 f\|_4^4$ est borné en utilisant l'inégalité de Sobolev [58]. En effet, en choisissant $\boldsymbol{\sigma}'$ de sorte que $\sigma_i' = (1-\tau)\sigma_i$ et $\tau < 1 - d/(4\bar{\sigma})$ (ceci implique que $\bar{\sigma}' > d/4$), on obtient

$$\|\Pi_2 f\|_4^2 \le C\|\Pi_2 f\|_{W_2^{\boldsymbol{\sigma}'}}^2 = C\Big[\sum_{\boldsymbol{l}\in\mathcal{N}_2(T)}\sum_{i=1}^d (2\pi l_i)^{2\sigma_i'}\theta_{\boldsymbol{l}}[f]^2\Big] \le C\Big[\sum_{\boldsymbol{l}\in\mathcal{N}_2(T)} d^\tau (c_l R^2)^{1-\tau}\theta_{\boldsymbol{l}}[f]^2\Big]$$
$$\le C(d/T)^\tau R^{2(1-\tau)}\Big[\sum_{\boldsymbol{l}\in\mathcal{N}_2(T)} c_l\theta_{\boldsymbol{l}}[f]^2\Big] \le C(d/T)^\tau R^{2(1-\tau)}.$$

Ceci complète la preuve, puisque le dernier terme tend vers zéro quand $T \to \infty$.

3.6.2 Preuve du lemme 3.12

Introduisons $\Pi_J f = \sum_{\boldsymbol{k}\in[1,2^J]^d} \alpha_{J,\boldsymbol{k}}\varphi_{J,\boldsymbol{k}}$. On décompose d'abord les coefficients empiriques comme suit :

$$\widehat{\alpha}_{J,\boldsymbol{k}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \varphi_{J,\boldsymbol{k}}(\mathbf{t}_i)x_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \varphi_{J,\boldsymbol{k}}(\mathbf{t}_i)f(\mathbf{t}_i) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \varphi_{J,\boldsymbol{k}}(\mathbf{t}_i)\xi_i := \tilde{\alpha}_{J,\boldsymbol{k}} + \epsilon_{j,\boldsymbol{k}}.$$

Alors, en utilisant des arguments standards, on a

$$\big\|\Pi f - \widehat{\Pi f}_n\big\|_4^4 \le 3^3\Big(\Big\|\sum_{\boldsymbol{k}\in[1,2^J]^d}(\alpha_{J,\boldsymbol{k}} - \tilde{\alpha}_{J,\boldsymbol{k}})\varphi_{J,\boldsymbol{k}}\Big\|_4^4 + \Big\|\sum_{\boldsymbol{k}\in[1,2^J]^d}\epsilon_{J,\boldsymbol{k}}\varphi_{J,\boldsymbol{k}}\Big\|_4^4 + \big\|\Pi f - \Pi_J f\big\|_4^4\Big)$$

avec $\|\Pi f - \Pi_J f\|_4^4 = O(2^{-4J\sigma})$. De plus, par les propriétés bien connues des bases d'ondelettes [17] et l'inégalité de Rosenthal,

$$E_f\Big\|\sum_{\boldsymbol{k}\in[1,2^J]^d}(\alpha_{J,\boldsymbol{k}} - \tilde{\alpha}_{J,\boldsymbol{k}})\varphi_{J,\boldsymbol{k}}\Big\|_4^4 = O(2^{Jd})\sum_{\boldsymbol{k}} E_f(\alpha_{J,\boldsymbol{k}} - \tilde{\alpha}_{J,\boldsymbol{k}})^4 = O\Big(\frac{2^{2Jd}}{n^2}\Big)$$

et

$$E\Big\|\sum_{\boldsymbol{k}\in[1,2^J]^d}\epsilon_{J,\boldsymbol{k}}\varphi_{J,\boldsymbol{k}}\Big\|_4^4 = O(2^{Jd})\sum_{\boldsymbol{k}} E[\epsilon_{J,\boldsymbol{k}}^4] = O(2^{Jd})\sum_{\boldsymbol{k}} E\Big(\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \varphi_{J,\boldsymbol{k}}^2(\mathbf{t}_i)\Big)^2$$
$$= 2^{2Jd}O\Big(\frac{1}{n^2} + \frac{2^{Jd}}{n^3}\Big).$$

Finalement on obtient, uniformément sur $f \in \Sigma$, $E_f\|\Pi f - \widehat{\Pi f}_n\|^4 = O(\frac{2^{2Jd}}{n^2} + \frac{2^{3Jd}}{n^3} + 2^{-4J\sigma})$, et le résultat annoncé vient.

3.7 Preuve de la Proposition 3.13

On va vérifier que toutes les hypothèses du Théorème 3.7 et du Théorème 3.9 sont satisfaites. On peut utiliser le théorème d'injection de Sobolev [58] pour **[C7]** : si $\bar{\sigma} > d/4$,

alors **[C7]** est satisfaite. Pour l'estimateur pilote proposé dans la Sous-section 3.3.2, **[C6]** est aussi satisfaite. Puisque la base de Fourier est uniformément bornée, vérifier **[C3]** est immédiat.

Soit maintenant $T_{n,\gamma} = (C_\gamma^* r_n^*)^{-2}(1+2\kappa^{-1})$, où r_n^* et C_γ^* sont définis dans la Proposition 3.13. On va montrer que

- $T_{n,\gamma}$ satisfait (3.15),
- $r_{n,\gamma}^*$ défini par (3.16) satisfait $r_{n,\gamma}^* \sim C_\gamma^* r_n^*$,
- Les conditions **[C1]**, **[C2]**, **[C5]**, **[C8]** et **[C9]** sont satisfaites.

A cette fin, on a besoin d'une analyse asymptotique des termes

$$I_0(T) = \sum_{\boldsymbol{l}\in\mathbb{Z}^d} \Big(q_{\boldsymbol{l}} - \frac{c_{\boldsymbol{l}}}{T}\Big)_+^2, \qquad I_1(T) = \sum_{\boldsymbol{l}\in\mathbb{Z}^d} q_{\boldsymbol{l}}\Big(q_{\boldsymbol{l}} - \frac{c_{\boldsymbol{l}}}{T}\Big)_+$$

et $I_2(T) = I_1(T) - I_0(T)$. Pour le premier, on a

$$I_0(T) = \sum_{\boldsymbol{l}\in\mathbb{Z}^d} \Big(\prod_{j=1}^d (2\pi l_j)^{2\alpha_j} - \sum_{i=1}^d \frac{(2\pi l_i)^{2\sigma_i}}{T} \Big)_+^2.$$

Pour tout $i \in \{1,\dots,d\}$, on pose

$$m_i = \frac{T^{\gamma_i}}{2\pi}, \quad \gamma_i = \frac{1}{2\sigma_i(1-\delta)} \quad \text{and} \quad x_{\boldsymbol{l},i} = \frac{2\pi l_i}{T^{\gamma_i}} = \frac{l_i}{m_i}.$$

Remarquons que, lorsque $\delta < 1$, on a $\gamma_i > 0$. Avec ces notations,

$$I_0(T) = T^{\frac{2\delta}{1-\delta}} m_1 \cdot \ldots \cdot m_d \sum_{\boldsymbol{l}\in\mathbb{Z}^d} \Big(\prod_{j=1}^d |x_{\boldsymbol{l},j}|^{2\alpha_j} - \sum_{i=1}^d |x_{\boldsymbol{l},i}|^{2\sigma_i} \Big)_+^2 / (m_1 \cdot \ldots \cdot m_d).$$

Comme $m_i \to \infty$ pour tout i, on peut remplacer les sommes par des intégrales

$$I_0(T) \sim \frac{T^{\frac{4\delta\bar\sigma+d}{2(1-\delta)\bar\sigma}}}{(2\pi)^d} \int_{\sum_{i=1}^d |x_j|^{2\sigma_j} < \prod_{j=1}^d |x_j|^{2\alpha_j}} \Big(\prod_{j=1}^d |x_j|^{2\alpha_j} - \sum_{i=1}^d |x_i|^{2\sigma_i} \Big)^2 d\boldsymbol{x}.$$

Ensuite, on fait le changement de variables $y_j = x_j^{2\sigma_j}$, $j = 1,\dots,d$ et on pose $\mathcal{D} = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}_+^d : \sum_{j=1}^d y_j < \prod_{i=1}^d y_i^{\alpha_i/\sigma_i}\}$. On obtient

$$I_0(T) \sim \frac{T^{\frac{4\delta\bar\sigma+d}{2(1-\delta)\bar\sigma}}}{\pi^d \sigma_1 \dots \sigma_d} \int_{\mathcal{D}} \Big(\prod_{i=1}^d y_i^{\frac{\alpha_i}{\sigma_i}} - \sum_{j=1}^d y_j \Big)^2 y_1^{\frac{1}{2\sigma_1}-1} \dots y_d^{\frac{1}{2\sigma_d}-1} d\boldsymbol{y}.$$

Maintenant, on fait un autre changement de variables : $z_i = y_i (\prod_{j=1}^d y_j^{\alpha_j/\sigma_j})^{-1}$. Remarquons que $\prod_{i=1}^d z_i^{\alpha_i/\sigma_i} = (\prod_{i=1}^d y_i^{\alpha_i/\sigma_i})^{1-\delta}$. Ainsi, en utilisant la notation $\Sigma_d = \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}_+^d : \|\boldsymbol{z}\|_1 \le 1\}$,

$$I_0(T) \sim \frac{T^{\frac{4\delta\bar\sigma+d}{2(1-\delta)\bar\sigma}}}{\pi^d \sigma_1 \dots \sigma_d} \int_{\Sigma_d} \Big(\prod_{i=1}^d z_i^{\frac{\alpha_i}{\sigma_i}} \Big)^{\frac{4\bar\sigma+d-2d\bar\sigma}{2\bar\sigma(1-\delta)}} (1-\|\boldsymbol{z}\|_1)^2 z_1^{\frac{1}{2\sigma_1}-1} \dots z_d^{\frac{1}{2\sigma_d}-1} \Delta(\boldsymbol{z})\, d\boldsymbol{z},$$

où $\Delta(\boldsymbol{z})$ est le Jacobien. Des calculs standards donnent $\Delta(\boldsymbol{z}) = (\prod_{i=1}^d z_i^{\alpha_i/\sigma_i})^{d/(1-\delta)}/(1-\delta)$. Ensuite on donne une forme explicite pour cette intégrale $I_0(T) \sim \pi^{-d} T^{\frac{4\delta\bar\sigma+d}{2(1-\delta)\bar\sigma}} I$, où

$$I = \frac{1}{(\prod_{i=1}^d \sigma_i)(1-\delta)} \int_{\Sigma_d} \Big(\prod_{i=1}^d z_i^{\frac{\alpha_i}{\sigma_i}}\Big)^{\frac{4\bar\sigma+d}{2\bar\sigma(1-\delta)}} (1-\|\boldsymbol{z}\|_1)^2 z_1^{\frac{1}{2\sigma_1}-1} \dots z_d^{\frac{1}{2\sigma_d}-1} d\boldsymbol{z}.$$

Cette intégrale peut être calculée en utilisant la formule de Liouville

$$\begin{aligned}\int_\Sigma \phi(x_1+\ldots+x_d) x_1^{p_1-1}\dots x_d^{p_d-1} dx_1\dots dx_d \\ = \frac{\Gamma(p_1)\dots\Gamma(p_d)}{\Gamma(p_1+\ldots+p_d)} \int_0^1 \phi(u) u^{p_1+\ldots+p_d-1} du,\end{aligned}$$

combinée avec l'identité bien connue $\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}\,du = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)/\Gamma(\alpha+\beta)$:

$$\begin{aligned} I &= \frac{\prod_{i=1}^d \Gamma(\frac{1}{2\sigma_i} + \frac{\alpha_i}{\sigma_i}\frac{4\bar\sigma+d}{2\bar\sigma(1-\delta)})}{(\prod_{i=1}^d \sigma_i)(1-\delta)\Gamma(\frac{1}{2\sigma} + (2+\frac{1}{2\sigma})\frac{\delta}{1-\delta})} \int_0^1 (1-u)^2 u^{\frac{d}{2\bar\sigma} + \frac{(4\bar\sigma+d)\delta}{2\bar\sigma(1-\delta)}-1} du \\ &= \frac{2\prod_{i=1}^d \Gamma(\kappa_i)}{(\prod_{i=1}^d \sigma_i)(1-\delta)\Gamma(\kappa+3)} = \frac{2\prod_{i=1}^d \Gamma(\kappa_i)}{(\prod_{i=1}^d \sigma_i)(1-\delta)(\kappa+2)\Gamma(\kappa+2)} = \frac{2\pi^d C(d,\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\alpha})}{\kappa+2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$I_0(T) \sim \frac{2C(d,\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\alpha})}{\kappa+2} T^{\frac{4\delta\bar\sigma+d}{2(1-\delta)\bar\sigma}}.$$

Des calculs très similaires impliquent que, quand $T\to\infty$, on a

$$I_1(T) \sim \frac{T^{\frac{4\delta\bar\sigma+d}{2(1-\delta)\bar\sigma}}}{\pi^d} \frac{\prod_{i=1}^d \Gamma(\kappa_i)}{(\prod_{i=1}^d \sigma_i)(1-\delta)\Gamma(\kappa+2)} = C(d,\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\alpha}) T^{\frac{4\delta\bar\sigma+d}{2(1-\delta)\bar\sigma}}.$$

Remarquons maintenant que (3.15) est équivalent à $n^2T^2 I_0(T) \sim 8T^4(I_1(T)-I_0(T))^2 z_{1-\gamma/2}^2$. En utilisant les équivalents asymptotiques pour I_0 et I_1 que l'on a dérivés ci-dessus, on vérifie directement que la valeur de $T_{n,\gamma}$ proposée dans la Proposition 3.13 satisfait (3.15). De plus, puisque (3.16) est équivalent à $(r^*_{n,\gamma})^2 = I_1(T_{n,\gamma})/T_{n,\gamma}I_2(T_{n,\gamma})$, on obtient $r^*_{n,\gamma} = C^*_\gamma r^*_n(1+o(1))$, comme annoncé dans la proposition.

Il reste à vérifier que pour la suite $T_{n,\gamma} \asymp n^{\frac{4\bar\sigma(1-\delta)}{4\bar\sigma+d}}$ les conditions **[C1]**, **[C2]**, **[C5]**, **[C8]** et **[C9]** sont satisfaites. En utilisant la même méthode que celle utilisée ci-dessus pour évaluer I_0, on obtient

$$|\mathcal{N}(T_{n,\gamma})| \asymp n^{\frac{2d}{4\bar\sigma+d}} \quad \text{et} \quad M(T_{n,\gamma}) = \sum_{l\in\mathcal{N}(T_{n,\gamma})} q_l^2 \asymp n^{\frac{2(4\delta\bar\sigma+d)}{4\bar\sigma+d}}. \tag{3.41}$$

L'hypothèse $\bar\sigma > d/4$ implique $|\mathcal{N}(T_{n,\gamma})| \log|\mathcal{N}(T_{n,\gamma})| = o(n)$ et, en conséquence, les conditions **[C4]** et **[C8]** sont vérifiées. De plus, la seconde relation dans (3.41) combinée avec $\delta<1$ implique **[C2]**. La condition **[C5]** vient du fait que tous les éléments non nuls de $\mathbf{q}$ sont minorés par 1.

Pour vérifier **[C1]** et **[C9]**, on a besoin de trouver une borne supérieure pour $\max_{l\in\mathcal{N}(T_{n,\gamma})} q_{\boldsymbol{l}}$. Dans les calculs suivants, le terme C est une constante qui dépend seulement de d, $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\sigma}$ et peut varier d'une ligne à l'autre. Soit $l \in \mathcal{N}(T)$, alors $c_{\boldsymbol{l}} \le T q_{\boldsymbol{l}}$, ce qui implique, pour tout $i = 1, \dots, d$, $l_i^{2(\sigma_i-\alpha_i)} \le CT \prod_{j\neq i} l_j^{2\alpha_j}$. En particulier

$$l_1^{2(\sigma_1-\alpha_1)} \le CT \prod_{j\neq 1} l_j^{2\alpha_j}, \quad l_2^{2(\sigma_2-\alpha_2)} \le CT \prod_{j\neq 2} l_j^{2\alpha_j}, \quad l_3^{2(\sigma_3-\alpha_3)} \le CT \prod_{j\neq 3} l_j^{2\alpha_j}. \tag{3.42}$$

En injectant la première inégalité de (3.42) dans la seconde, on obtient

$$l_2^{2(\sigma_2-\alpha_2)} \le CT\Big(\prod_{j\ge 3} l_j^{2\alpha_j}\Big)\Big(CT \prod_{j\ge 2} l_j^{2\alpha_j}\Big)^{\frac{\alpha_1}{\sigma_1-\alpha_1}} \le C\Big(T \prod_{j\ge 3} l_j^{2\alpha_j}\Big)^{\frac{\sigma_1}{\sigma_1-\alpha_1}} \Big(l_2^{2\alpha_2}\Big)^{\frac{\alpha_1}{\sigma_1-\alpha_1}}.$$

D'où

$$l_2^{2\sigma_2} \le C\Big(T \prod\nolimits_{j\ge 3} l_j^{2\alpha_j}\Big)^{\frac{1}{1-\alpha_1/\sigma_1-\alpha_2/\sigma_2}} \tag{3.43}$$

et par symétrie,

$$l_1^{2\sigma_1} \le C\Big(T \prod\nolimits_{j\ge 3} l_j^{2\alpha_j}\Big)^{\frac{1}{1-\alpha_1/\sigma_1-\alpha_2/\sigma_2}}. \tag{3.44}$$

Ensuite, en utilisant (3.43), (3.44) et la troisième inégalité dans (3.42), on obtient

$$l_3^{2\sigma_3} \le C\Big(T \prod\nolimits_{j\ge 4} l_j^{2\alpha_j}\Big)^{\frac{1}{1-\alpha_1/\sigma_1-\alpha_2/\sigma_2-\alpha_3/\sigma_3}}.$$

Des itérations du processus précédent mènent à l'inégalité $\max_j l_j^{2\sigma_j} \le CT^{1/(1-\delta)}$. Ainsi, $\max_{\boldsymbol{l}\in\mathcal{N}(T)} q_{\boldsymbol{l}} = C\prod_{j=1}^d l_j^{2\alpha_j} \le CT^{\frac{\delta}{1-\delta}}$. En combinant cette borne avec $T_{n,\gamma} \asymp n^{\frac{4\bar\sigma(1-\delta)}{4\bar\sigma+d}}$ et (3.41) on obtient les inégalités de **[C1]** et **[C9]**.

3.8 Preuve de la Proposition 3.17

Comme dans la sous-section précédente, on commence par calculer I_0. En posant $x_{\boldsymbol{l},i} = \frac{2\pi l_i}{T^{\frac{1}{\sigma-1}}}$ et en utilisant la même méthode pour obtenir une intégrale, on a

$$\begin{aligned} I_0 &= T^{\frac{4}{\sigma-1}} \sum_{\boldsymbol{l}\in\mathbb{Z}^d} \Big[\|\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{l}}\|_2^2 - (\boldsymbol{\beta}^\top \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{l}})^2 - \|\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{l}}\|_{2\sigma}^{2\sigma}\Big]_+^2 \\ &\sim \frac{T^{\frac{d+4}{\sigma-1}}}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \Big[\|\boldsymbol{x}\|_2^2 - (\boldsymbol{\beta}^\top \boldsymbol{x})^2 - \|\boldsymbol{x}\|_{2\sigma}^{2\sigma}\Big]_+^2 d\boldsymbol{x}. \end{aligned}$$

Ceci implique la relation asymptotique $I_0 \sim C_0 T^{\frac{d+4}{\sigma-1}}$ avec la constante $C_0 = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\big[\sum_{i=1}^d (x_i - \frac{1}{d}\sum_{j=1}^d x_j)^2 - \sum_{i=1}^d x_i^{2\sigma}\big]_+^2 d\boldsymbol{x}$. Des calculs similaires donnent $I_1 \sim C_1 T^{(d+4)/(\sigma-1)}$ et $I_2 \sim C_2 T^{(d+4)/(\sigma-1)}$, où C_1 et C_2 ont les valeurs données dans le paragraphe précédent la proposition.

Le reste de la preuve peut être mené exactement de la même manière que dans la preuve de la proposition précédente, en se basant sur la relation $N(T) \asymp T^{\frac{d}{\sigma-1}}$ et $M(T) \asymp T^{\frac{d+4}{\sigma-1}}$.

3.9 Preuves des résultats énoncés dans la Section 3.4

3.9.1 Preuve du Théorème 3.18

Les arguments sont presque les mêmes que dans la preuve du Théorème 3.7. On utilise le tableau $\mathbf{w}_n$ avec les éléments $w_l = q_l \mathbf{1}_{\{l\in\mathcal{N}(T)\}}/M(T)^{1/2}$ et le noyau $G_n(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2) = \sum_{l\in\mathcal{L}} w_l\varphi_l(\mathbf{t}_1)\varphi_l(\mathbf{t}_2)$ de façon à définir la staistique de U-test linéaire :

$$U_n = \binom{n}{2}^{-1/2} \sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j G_n(\mathbf{t}_i,\mathbf{t}_j).$$

On écrit $U_n = U_{n,0} + U_{n,1} + U_{n,2}$, où

$$U_{n,0} = \binom{n}{2}^{-1/2} \sum_{i<j} \xi_i\xi_j G_n(\mathbf{t}_i,\mathbf{t}_j), \quad U_{n,1} = \binom{n}{2}^{-1/2} \sum_{i<j} (\xi_i f(\mathbf{t}_j) + \xi_j f(\mathbf{t}_i)) G_n(\mathbf{t}_i,\mathbf{t}_j)$$

et $U_{n,2} = \binom{n}{2}^{-1/2} \sum_{i<j} f(\mathbf{t}_i)f(\mathbf{t}_j)G_n(\mathbf{t}_i,\mathbf{t}_j)$. Les premiers et seconds moments de cette U-statistique sont décrits dans le prochain résultat, dans lequel on utilise la notation $\mathtt{T}_{\mathbf{w}}[f] = \sum_l w_l\theta_l[f]\varphi_l$.

Lemme 3.30. *Soit $\mathbf{w}_n = (w_{l,n})_{l\in\mathcal{L}}$ un tableau contenant seulement un nombre fini d'éléments non nuls et tel que $\sum_{l\in\mathcal{L}} w_{l,n}^2 = 1$. Soit $\mathcal{L}(\mathbf{w}_n)$ le support de $\mathbf{w}_n$. L'espérance de la U-statistique U_n est donnée par :*

$$E_f[U_n] = E_f[U_{n,2}] = \bar{h}_n[f,\mathbf{w}_n] = \Big(\frac{n(n-1)}{2}\Big)^{1/2} \sum_l w_l\theta_l^2[f].$$

De plus, si **[D2]** *est vraie, alors $E[U_{n,0}^2] = 1$, $E[U_{n,1}^2] \le 2D_2\|\mathbf{w}_n\|_\infty^2\|\mathbf{w}_n\|_0\|f\|_2^2$ et*

$$\mathrm{Var}[U_{n,2}] \le D_2\|\mathbf{w}_n\|_\infty^2\|\mathbf{w}_n\|_0\|f\|_4^4 + \frac{2n}{3}\|f\cdot\mathtt{T}_{\mathbf{w}}[f]\|_2^2.$$

Démonstration. Ce résultat peut être prouvé en suivant les lignes de la preuve du lemme 3.23. La seule différence se trouve dans l'évaluation du terme $A_{n,2}$, pour lequel on a

$$\begin{aligned} A_{n,2} &= \frac{4}{n(n-1)}\binom{n}{3} \sum_{l,l'\in\mathcal{L}(\mathbf{w}_n)} w_l w_{l'}\theta_l[f]\theta_{l'}[f]\Big\{\int f(\mathbf{t})^2\varphi_l(\mathbf{t})\varphi_{l'}(\mathbf{t})\,d\mathbf{t}\Big\} \\ &= \frac{2(n-2)}{3}\Big\{\int f(\mathbf{t})^2\Big(\sum_l w_l\theta_l[f]\varphi_l(\mathbf{t})\Big)^2 d\mathbf{t}\Big\} \le \frac{2n}{3}\|f\cdot\mathtt{T}_{\mathbf{w}}[f]\|_2^2. \end{aligned}$$

Ceci donne le résultat désiré. □

Etudions maintenant les probabilités d'erreur de première et seconde espèces du test $\phi_n(T) = \mathbf{1}_{\{|U_n(T)|>u\}}$.

Evaluation de l'erreur de première espèce En utilisant l'inégalité de Tchebychev, pour tout $u > |E[U_n(T)]|$, on a

$$\begin{aligned}\sup_{f\in\mathcal{F}_0} P_f(|U_n(T)| > u) &\le \sup_{f\in\mathcal{F}_0} P_f\Big(|U_n(T) - E[U_n(T)]| > u - |E[U_n(T)]|\Big)\\ &\le \sup_{f\in\mathcal{F}_0} \frac{\mathrm{Var}(U_n(T))}{(u - |E[U_n(T)]|)^2}.\end{aligned}$$

Notons $\nu_{n,T} = nT^{-1}(2M(T))^{-1/2}$. En utilisant le lemme 3.30, on obtient

$$|E[U_n(T)]| \le \frac{n}{\sqrt{2M(T)}}\Big|\sum_{l\in\mathcal{N}(T)} q_l\theta_l^2[f]\Big| = T\nu_{n,T}\Big|\sum_{l\in\mathcal{N}(T)} q_l\theta_l^2[f]\Big|.$$

Puisque, sous H_0, on a $Q[f] = \sum_l q_l\theta_l[f]^2 = 0$ et $\sum_l c_l\theta_l[f]^2 \le 1$, la dernière somme peut être bornée comme suit : $\big|\sum_{l\in\mathcal{N}(T)} q_l\theta_l^2[f]\big| = \big|\sum_{l:|q_l|<c_l/T} q_l\theta_l^2[f]\big| \le T^{-1}\sum_l c_l\theta_l[f]^2 \le T^{-1}$. Ainsi, $|E[U_n(T)]| = |\bar{h}_n[\mathbf{w}_n, f]| \le \nu_{n,T}$. En combinant cette borne avec celles du lemme 3.30, on arrive à

$$\begin{aligned}\sup_{f\in\mathcal{F}_0} P_f(\phi_n(T) = 1) &\le \frac{3(1 + 2D_1D_2D_3^2 + D_1D_2D_3^4 + 2nD_4/(3M(T))}{(u - \nu_{n,T})^2}\\ &= \frac{B_1 + B_2nM(T)^{-1}}{2(u - \nu_{n,T})^2}\end{aligned}$$

En conséquence, si on choisit $u \ge \nu_{n,T} + \big(B_1 + B_2nM(T)^{-1}\big)^{1/2}\gamma^{-1/2}$, alors

$$\sup_{f\in\mathcal{F}_0} P_f(\phi_n(T) = 1) \le \frac{\gamma}{2}. \tag{3.45}$$

Evaluation de l'erreur du seconde espèce En utilisant des arguments similaires, on obtient

$$\begin{aligned}\sup_{f\in\mathcal{F}_1(\rho)} P_f(\phi_n(T) = 0) &= \sup_{f\in\mathcal{F}_1(\rho)} P_f(|U_n(T)| \le u)\\ &\le \sup_{f\in\mathcal{F}_1(\rho)} P_f(|E[U_n(T)]| - |U_n(T) - E[U_n(T)]| \le u)\\ &\le \sup_{f\in\mathcal{F}_1(\rho)} P_f(T\nu_{n,T}|Q[f]| - \nu_{n,T} - |U_n(T) - E[U_n(T)]| \le u)\\ &\le P(T\nu_{n,T}\rho^2 - |U_n(T) - E[U_n(T)]| \le u + \nu_{n,T}).\end{aligned}$$

Ceci peut aussi être écrit :

$$\sup_{f\in\mathcal{F}_1(\rho)} P_f(\phi_n(T) = 0) \le P\Big(|U_n(T) - E[U_n(T)]| \ge (T\rho^2 - 1)\nu_{n,T} - u\Big).$$

En utilisant l'inégalité de Tchebychev et les évaluations obtenues dans le lemme 3.30, on obtient

$$\sup_{f\in\mathcal{F}_1(\rho)} P_f(\phi_n(T) = 0) \le \frac{B_1 + B_2nM(T)^{-1}}{2\big((T\rho^2 - 1)\nu_{n,T} - u\big)^2}.$$

Clairement, le côté droit de cette inégalité est plus petit que $\gamma/2$ si

$$\rho^2 \geq \left[u + \frac{1}{\gamma^{-1/2}}\left(B_1 + \frac{B_2 n}{M(T)}\right)^{1/2}\right]\frac{1}{T\nu_{n,T}} + \frac{1}{T}.$$

Ceci achève la preuve du Théorème 3.18.

3.9.2 Preuve du Corollaire 3.19

Il suffit de remarquer que (puisque $M(\cdot)$ est croissant et $T_n \leq T_n^0$)

$$\frac{\sqrt{M(T_n)}}{n} \leq \frac{\sqrt{M(T_n^0)}}{n} \asymp \frac{1}{T_n^0} \leq \frac{1}{T_n}$$

et $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq T_n^{-1}$. Au vu de ces inégalités, l'affirmation du corollaire vient immédaitement du Théorème 3.18.

3.9.3 Preuve du Théorème 3.21

On commence par prouver que le taux minimax de séparation est minoré par $n^{-1/4}$. Soit $l_a = \text{argmin}_{l\in\mathcal{L}_a}\{c_l\}$ for $a \in \{+,-\}$. On définit deux fonctions f_0 et f_1 comme des combinaisons linéaires des fonctions de base φ_{l_-} et φ_{l_+}. Plus précisément,

$$f_i = \theta_{i,-}\varphi_{l_-} + \theta_{i,+}\varphi_{l_+}, \qquad \text{pour} \qquad i = 0, 1,$$

avec

$$\theta_{0,-}^2 = \frac{q_{l_+}}{c_{l_-}q_{l_+} + c_{l_+}|q_{l_-}|} \quad \theta_{0,+}^2 = \frac{|q_{l_-}|}{c_{l_-}q_{l_+} + c_{l_+}|q_{l_-}|}$$

et, pour un certain $z > 0$,

$$\theta_{1,-} = \theta_{0,-} \quad \theta_{1,+}^2 = \theta_{0,+}^2 - z/\sqrt{n}.$$

On vérifie aisément que $f_0 \in \mathcal{F}_0$ et $f_1 \in \mathcal{F}_1(r_n)$ avec $r_n^2 = zq_{l_+}/\sqrt{n}$. De plus, la divergence de Kullback-Leibler $K(P_{f_0}, P_{f_1}) = \int \log \frac{dP_{f_0}}{dP_{f_1}} dP_{f_0}$ entre les mesures de probabilité P_{f_0} et P_{f_1} peut être bornée comme suit :

$$\begin{aligned}
K(P_{f_0}, P_{f_1}) &= E\left(E_{f_0}\left[\log\frac{dP_{f_0}}{dP_{f_1}}(x_1,\ldots,x_n,\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n)\middle|\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n\right]\right) \\
&= E\left(E_{f_0}\left[\sum_{i=1}^n (x_i - f_1(\mathbf{t}_i))^2 - (x_i - f_0(\mathbf{t}_i))^2\middle|\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n\right]\right) \\
&= nE\left[\left(f_0(\mathbf{t}_1) - f_1(\mathbf{t}_1)\right)^2\right] = n\sum\nolimits_{a\in\{+,-\}}(\theta_{0,a} - \theta_{1,a})^2 \\
&= n\left(\theta_{0,+} - |\theta_{0,+}^2 - zn^{-1/2}|^{1/2}\right)^2 \leq z^2(2\theta_{0,+})^{-2}.
\end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit d'utiliser l'inégalité (2.74) de [83], qui implique que $\gamma_n(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1(r_n)) \geq 0.25e^{-z^2(2\theta_{0,+})^{-2}} = \gamma$ pour $z = 2\theta_{0,+}[\ln(4\gamma)^{-1}]^{1/2}$.

Il reste à prouver la seconde assertion du théorème. Pour simplifier les notations, on écrit T_n au lieu de T_n^0 et on pose

$$Q_a[f] = \sum\nolimits_{l\in\mathcal{L}_a} q_l\theta_l^2[f] \qquad \text{et} \qquad \mathcal{F}_a = \{f : Q_a[f] = 0\}, \qquad \text{pour} \qquad a \in \{+,-\}.$$

Supposons que $M_+(T_n) \geq M_-(T_n)$. On utilise le fait que tester $Q[f] = 0$ contre $|Q[f]| \geq r_n^2$, avec $f \in \Sigma$ est plus difficile que tester $Q_+[f] = 0$ contre $Q_+[f] \geq r_n^2$, avec $f \in \mathcal{F}_-$. En effet, l'hypothèse nulle et l'alternative de ce dernier problème sont inclus respectivement dans l'hypothèse nulle et l'alternative du premier problème.

Le reste de la preuve suit les mêmes étapes que celles de la preuve du Théorème 3.9. Comme on l'a indiqué dans la Remarque 3.10, on utilise pour π_n la loi a priori simplifiée pour laquelle les θ_l sont des variables aléatoires gaussiennes de moyenne nulle et de variance $a_l = \frac{q_l}{2T_nM_+(T_n)}\mathbf{1}_{\{l\in\mathcal{L}_+\cup\mathcal{N}(T_n)\}}$. Montrer que les conditions **[L1]**-**[L5]** de la Proposition 3.26 sont satisfaites avec $\delta = 1/2$ est un exercice facile. Ceci complète la preuve du théorème.

Bibliographie

[1] F. Abramovich, Y. Benjamini, D.L. Donoho, and I.M. Johnstone. Adapting to unknown sparsity by controlling the false discovery rate. *The Annals of Statistics*, 34(2) : 584–653, 2006.

[2] Hirotsugu Akaike. Information theory and an extension of the maximum likelihood principle. In *Second International Symposium on Information Theory (Tsahkadsor, 1971)*, pages 267–281. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1973.

[3] Pierre Alquier. Iterative feature selection in least square regression estimation. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 44(1) :47–88, 2008.

[4] A. Antoniadis and J. Fan. Regularization of wavelet approximations. *Journal of the American Statistical Association*, 96(455) :939–967, 2001.

[5] Francis Bach. High-dimensional non-linear variable selection through hierarchical kernel learning. Technical report, arXiv :0909.0844, 2009.

[6] Y. Baraud, S. Huet, and B. Laurent. Adaptive tests of linear hypotheses by model selection. *Ann. Statist.*, 31(1) :225–251, 2003.

[7] Y. Baraud, S. Huet, and B. Laurent. Testing convex hypotheses on the mean of a Gaussian vector. Application to testing qualitative hypotheses on a regression function. *Ann. Statist.*, 33(1) :214–257, 2005.

[8] Karine Bertin and Guillaume Lecué. Selection of variables and dimension reduction in high-dimensional non-parametric regression. *Electron. J. Stat.*, 2 :1224–1241, 2008.

[9] Peter J. Bickel, Ya'acov Ritov, and Alexandre B. Tsybakov. Hierarchical selection of variables in sparse high-dimensional regression. *Borrowing Strength : Theory Powering Applications - A Festschrift for Lawrence D. Brown. IMS Collections*, 6 :56–69, 2010.

[10] P.J. Bickel and E. Levina. Some theory for fisher's linear discriminant function,naive bayes', and some alternatives when there are many more variables than observations. *Bernoulli*, 10(6) :989–1010, 2004.

[11] L. Breiman. Better subset regression using the nonnegative garrote. *Technometrics*, 37(4) :373–384, 1995.

[12] Lawrence D. Brown and Mark G. Low. Asymptotic equivalence of nonparametric regression and white noise. *Ann. Statist.*, 24(6) :2384–2398, 1996.

[13] Lawrence D. Brown, Andrew V. Carter, Mark G. Low, and Cun-Hui Zhang. Equivalence theory for density estimation, Poisson processes and Gaussian white noise with drift. *Ann. Statist.*, 32(5) :2074–2097, 2004.

[14] Florentina Bunea and Adrian Barbu. Dimension reduction and variable selection in case control studies via regularized likelihood optimization. *Electron. J. Stat.*, 3 : 1257–1287, 2009.

[15] C. Butucea. Goodness-of-fit testing and quadratic functional estimation from indirect observations. *Ann. Statist.*, 35(5) :1907–1930, 2007.

[16] Tony T. Cai and Mark G. Low. Optimal adaptive estimation of a quadratic functional. *Ann. Statist.*, 34(5) :2298–2325, 2006.

[17] A. Cohen. *Numerical analysis of wavelet methods*, volume 32 of *Studies in Mathematics and its Applications*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 2003.

[18] O. Collier. Minimax hypothesis testing for curve registration. *Electronic Journal of Statistics*, to appear, 2012.

[19] L. Comminges and A. S. Dalalyan. Tight conditions for consistency of variable selection in the context of high dimensionality. *technical report*, (arXiv :1106.4293v2 [math.ST]), 2011.

[20] Laëtitia Comminges. Conditions minimales de consistance pour la sélection de variables en grande dimension. *Comptes Rendus Mathematique*, 349(7-8) :469–472, feb 2011.

[21] Laëtitia Comminges and Arnak S. Dalalyan. Tight conditions for consistent variable selection in high dimensional nonparametric regression. *J.Mach. Learn. Res. - Proceedings Track*, 19 :187–206, 2011.

[22] A. S. Dalalyan and O. Collier. Wilks' phenomenon and penalized likelihood-ratio test for nonparametric curve registration. *J. Mach. Learn. Res. - Proceedings Track*, 22 : 264–272, 2012.

[23] Arnak Dalalyan and Markus Reiß. Asymptotic statistical equivalence for scalar ergodic diffusions. *Probab. Theory Related Fields*, 134(2) :248–282, 2006.

[24] Arnak S. Dalalyan, Anatoly Juditsky, and Vladimir Spokoiny. A new algorithm for estimating the effective dimension-reduction subspace. *J. Mach. Learn. Res.*, 9 : 1648–1678, 2008.

[25] Jean Dieudonné. *Calcul infinitésimal*. Hermann, Paris, 1968.

[26] David Donoho and Jiashun Jin. Feature selection by higher criticism thresholding achieves the optimal phase diagram. *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 367(1906) :4449–4470, 2009.

[27] B. Efron, T. Hastie, I. Johnstone, and R. Tibshirani. Least angle regression. *The Annals of statistics*, 32(2) :407–499, 2004.

[28] M. Ermakov. Nonparametric signal detection with small type I and type II error probabilities. *Stat. Inference Stoch. Process.*, 14(1) :1–19, 2011. doi : 10.1007/s11203-010-9048-5.

[29] M. S. Ermakov. Minimax detection of a signal in Gaussian white noise. *Teor. Veroyatnost. i Primenen.*, 35(4) :704–715, 1990. doi : 10.1137/1135098.

[30] J. Fan. Comments on «wavelets in statistics : A review» by a. antoniadis. *Statistical Methods & Applications*, 6(2) :131–138, 1997.

[31] J. Fan and Y. Fan. High dimensional classification using features annealed independence rules. *Annals of statistics*, 36(6) :2605, 2008.

[32] J. Fan and J. Lv. Sure independence screening for ultrahigh dimensional feature space. *Journal of the Royal Statistical Society : Series B (Statistical Methodology)*, 70(5) :849–911, 2008.

[33] J. Fan and R. Song. Sure independence screening in generalized linear models with np-dimensionality. *The Annals of Statistics*, 38(6) :3567–3604, 2010.

[34] J. Fan, Y. Feng, and R. Song. Nonparametric independence screening in sparse ultra-high-dimensional additive models. *Journal of the American Statistical Association*, 106(494) :544–557, 2011.

[35] Jianqing Fan and Runze Li. Variable selection via nonconcave penalized likelihood and its oracle properties. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 96(456) :1348–1360, 2001.

[36] Jianqing Fan and Jinchi Lv. Nonconcave penalized likelihood with NP-dimensionality. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 57(8) :5467–5484, 2011.

[37] Jianqing Fan, Richard Samworth, and Yichao Wu. Ultrahigh dimensional feature selection : beyond the linear model. *J. Mach. Learn. Res.*, 10 :2013–2038, 2009.

[38] S. Gaïffas and G. Lecué. Optimal rates and adaptation in the single-index model using aggregation. *Electron. J. Stat.*, 1 :538–573, 2007.

[39] G. Gayraud and C. Pouet. Adaptive minimax testing in the discrete regression scheme. *Probab. Theory Related Fields*, 133(4) :531–558, 2005.

[40] G. Gayraud and Ch. Pouet. Minimax testing composite null hypotheses in the discrete regression scheme. *Math. Methods Statist.*, 10(4) :375–394 (2002), 2001. Meeting on Mathematical Statistics (Marseille, 2000).

[41] Ghislaine Gayraud and Yuri Ingster. Detection of sparse variable functions. Technical report, arXiv :1011.6369v3, 2011.

[42] Georgi K. Golubev, Michael Nussbaum, and Harrison H. Zhou. Asymptotic equivalence of spectral density estimation and Gaussian white noise. *Ann. Statist.*, 38(1) :181–214, 2010. ISSN 0090-5364. doi : 10.1214/09-AOS705. URL http://dx.doi.org/10.1214/09-AOS705.

[43] Peter Hall. Central limit theorem for integrated square error of multivariate nonparametric density estimators. *J. Multivariate Anal.*, 14(1) :1–16, 1984.

[44] Mohamed Hebiri. Sparse conformal predictors. *Statistics and Computing*, 20 :253–266, April 2010.

[45] J. L. Horowitz and V. G. Spokoiny. An adaptive, rate-optimal test of a parametric mean-regression model against a nonparametric alternative. *Econometrica*, 69(3) : 599–631, 2001.

[46] Junzhou Huang and Tong Zhang. The benefit of group sparsity. *Ann. Statist.*, 38(4) : 1978–2004, 2010.

[47] Yu. I. Ingster. Asymptotically minimax hypothesis testing for nonparametric alternatives. I. *Math. Methods Statist.*, 2(2) :85–114, 1993.

[48] Yu. I. Ingster. Asymptotically minimax hypothesis testing for nonparametric alternatives. II. *Math. Methods Statist.*, 2(3) :171–189, 1993.

[49] Yu. I. Ingster. Asymptotically minimax hypothesis testing for nonparametric alternatives. III. *Math. Methods Statist.*, 2(4) :249–268, 1993.

[50] Yu. I. Ingster and T. Sapatinas. Minimax goodness-of-fit testing in multivariate nonparametric regression. *Math. Methods Statist.*, 18(3) :241–269, 2009.

[51] Yu. I. Ingster and I. A. Suslina. *Nonparametric goodness-of-fit testing under Gaussian models*, volume 169 of *Lecture Notes in Statistics*. Springer-Verlag, New York, 2003.

[52] Yu. I. Ingster, T. Sapatinas, and I. A. Suslina. Minimax Signal Detection in Ill-Posed Inverse Problems. *Ann. Statist.*, 2012.

[53] Yuri Ingster and Natalia Stepanova. Estimation and detection of functions from anisotropic Sobolev classes. *Electron. J. Stat.*, 5 :484–506, 2011.

[54] Yuri Ingster and Irina Suslina. Estimation and hypothesis testing for functions from tensor products of spaces. *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)*, 351(Veroyatnost i Statistika. 12) :180–218, 301–302, 2007.

[55] Rodolphe Jenatton, Jean-Yves Audibert, and Francis Bach. Structured variable selection with sparsity-inducing norms. *J.Mach. Learn. Res.*, 12 (Oct) :2777–2824, 2011.

[56] Hellmuth Kneser. Sur un théorème fondamental de la théorie des jeux. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 234 :2418–2420, 1952.

[57] Vladimir Koltchinskii and Ming Yuan. Sparsity in multiple kernel learning. *Ann. Statist.*, 38(6) :3660–3695, 2010.

[58] V. I. Kolyada. On the embedding of Sobolev spaces. *Mat. Zametki*, 54(3) :48–71, 158, 1993.

[59] John Lafferty and Larry Wasserman. Rodeo : sparse, greedy nonparametric regression. *Ann. Statist.*, 36(1) :28–63, 2008.

[60] B. Laurent, J.M. Loubes, and C. Marteau. Testing inverse problems : a direct or an indirect problem ? *Journal of Statistical Planning and Inference*, 141(5) :1849–1861, 2011.

[61] B. Laurent, J.M. Loubes, and C. Marteau. Non asymptotic minimax rates of testing in signal detection with heterogeneous variances. *Electronic Journal of Statistics*, 6 : 91–122, 2012.

[62] Beatrice Laurent and Pascal Massart. Adaptive estimation of a quadratic functional by model selection. *Ann. Statist.*, 28(5) :1302–1338, 2000.

[63] lldiko E. Frank and J.H. Friedman. A statistical view of some chemometrics regression tools. *Technometrics*, 35(2) :109–135, 1993.

[64] Karim Lounici, Massimiliano Pontil, Alexandre B. Tsybakov, and Sara van de Geer. Oracle inequalities and optimal inference under group sparsity. *Ann. Statist.*, 39(4) : 2164–2204, 2011.

[65] J. Lv and Y. Fan. A unified approach to model selection and sparse recovery using regularized least squares. *The Annals of Statistics*, 37(6A) :3498–3528, 2009.

[66] S.G. Mallat. *A wavelet tour of signal processing*. Academic Pr, 1999.

[67] Colin L. Mallows. Some comments on C_p. *Technometrics*, 15 :661–675, Nov. 1973.

[68] James Mazo and Andrew Odlyzko. Lattice points in high-dimensional spheres. *Monatsh. Math.*, 110(1) :47–61, 1990.

[69] N. Meinshausen and P. Bühlmann. High-dimensional graphs and variable selection with the lasso. *The Annals of Statistics*, 34(3) :1436–1462, 2006.

[70] Nicolai Meinshausen and Peter Bühlmann. Stability selection. *J. R. Stat. Soc. Ser. B Stat. Methodol.*, 72(4) :417–473, 2010.

[71] Michael Nussbaum. Asymptotic equivalence of density estimation and Gaussian white noise. *Ann. Statist.*, 24(6) :2399–2430, 1996. ISSN 0090-5364. doi : 10.1214/aos/1032181160. URL http://dx.doi.org/10.1214/aos/1032181160.

[72] Guillaume Obozinski, Martin J. Wainwright, and Michael I. Jordan. Support union recovery in high-dimensional multivariate regression. *Ann. Statist.*, 39(1) :1–47, 2011.

[73] C. Pouet. An asymptotically optimal test for a parametric set of regression functions against a non-parametric alternative. *J. Statist. Plann. Inference*, 98(1-2) :177–189, 2001.

[74] Garvesh Raskutti, Martin J. Wainwright, and Bin Yu. Minimax-optimal rates for sparse additive models over kernel classes via convex programming. Technical report, arXiv :1008.3654v2, 2011.

[75] Pradeep Ravikumar, Martin J. Wainwright, and John D. Lafferty. High-dimensional Ising model selection using ℓ_1-regularized logistic regression. *Ann. Statist.*, 38(3) : 1287–1319, 2010.

[76] Markus Reiß. Asymptotic equivalence for nonparametric regression with multivariate and random design. *Ann. Statist.*, 36(4) :1957–1982, 2008.

[77] Alexander Samarov, Vladimir Spokoiny, and Celine Vial. Component identification and estimation in nonlinear high-dimensional regression models by structural adaptation. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 100(470) :429–445, 2005.

[78] Gideon Schwarz. Estimating the dimension of a model. *Ann. Statist.*, 6(2) :461–464, 1978.

[79] James G. Scott and James O. Berger. Bayes and empirical-Bayes multiplicity adjustment in the variable-selection problem. *Ann. Statist.*, 38(5) :2587–2619, 2010.

[80] J. Shao. An asymptotic theory for linear model selection. *Statistica Sinica*, 7 :221–242, 1997.

[81] V. G. Spokoiny. Adaptive hypothesis testing using wavelets. *Ann. Statist.*, 24(6) : 2477–2498, 1996.

[82] Robert Tibshirani. Regression shrinkage and selection via the lasso. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, 58(1) :267–288, 1996.

[83] A.B. Tsybakov. *Introduction to nonparametric estimation*. Springer Verlag, 2009.

[84] R. Vershynin. Introduction to the non-asymptotic analysis of random matrices. *Technical report*, arXiv :1011.3027v6, 2012.

[85] Nicolas Verzelen. Minimax risks for sparse regressions : Ultra-high-dimensional phenomenons. *Electron. J. Statist.*, 6 :38–90, 2012.

[86] Martin J. Wainwright. Information-theoretic limits on sparsity recovery in the high-dimensional and noisy setting. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 55(12) :5728–5741, 2009.

[87] MJ Wainwright. Sharp thresholds for noisy and high-dimensional recovery of sparsity using l1-constrained quadratic programming (lasso). *IEEE Transactions on Information Theory*, 55(5) :2183–2202, 2009.

[88] H. Wang, R. Li, and C.L. Tsai. Tuning parameter selectors for the smoothly clipped absolute deviation method. *Biometrika*, 94(3) :553–568, 2007.

[89] Larry Wasserman and Kathryn Roeder. High-dimensional variable selection. *Ann. Statist.*, 37(5A) :2178–2201, 2009.

[90] T.T. Wu and K. Lange. Coordinate descent algorithms for lasso penalized regression. *The Annals of Applied Statistics*, pages 224–244, 2008.

[91] Y. Yang. Can the strengths of aic and bic be shared ? a conflict between model indentification and regression estimation. *Biometrika*, 92(4) :937–950, 2005.

[92] Ming Yuan and Yi Lin. Model selection and estimation in regression with grouped variables. *J. R. Stat. Soc. Ser. B Stat. Methodol.*, 68(1) :49–67, 2006.

[93] Cun-Hui Zhang. Nearly unbiased variable selection under minimax concave penalty. *Ann. Statist.*, 38(2) :894–942, 2010.

[94] T. Zhang. On the consistency of feature selection using greedy least squares regression. *Journal of Machine Learning Research*, 10 :555–568, 2009.

[95] Peng Zhao and Bin Yu. On model selection consistency of Lasso. *J. Mach. Learn. Res.*, 7 :2541–2563, 2006.

[96] Peng Zhao, Guilherme Rocha, and Bin Yu. The composite absolute penalties family for grouped and hierarchical variable selection. *Ann. Statist.*, 37(6A) :3468–3497, 2009.

[97] H. Zou. The adaptive lasso and its oracle properties. *Journal of the American Statistical Association*, 101(476) :1418–1429, 2006.

[98] H. Zou and R. Li. One-step sparse estimates in nonconcave penalized likelihood models. *Annals of statistics*, 36(4) :1509, 2008.

[99] H. Zou, T. Hastie, and R. Tibshirani. On the “degrees of freedom” of the lasso. *The Annals of Statistics*, 35(5) :2173–2192, 2007.