



Modèle théorique de courant de gravité issu d'un rejet continu sur un plan inclinable dans un milieu ouvert

Safir Haddad, Samuel Vaux, Kevin Varrall, Olivier Vauquelin

► To cite this version:

Safir Haddad, Samuel Vaux, Kevin Varrall, Olivier Vauquelin. Modèle théorique de courant de gravité issu d'un rejet continu sur un plan inclinable dans un milieu ouvert. 25e Congrès Français de Mécanique, Aug 2022, Nantes, France. hal-04280154

HAL Id: hal-04280154

<https://hal.science/hal-04280154>

Submitted on 10 Nov 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Modèle théorique de courant de gravité issu d'un rejet continu sur un plan inclinable dans un milieu ouvert

S. HADDAD^a, S. VAUX^a, K. VARRALL^b, O. VAUQUELIN^b

a. Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire (IRSN), PSN-RES, SA2I, LIE, Cadarache, 13115 Saint-Paul-lez-Durance, France

b. Aix-Marseille Université (AMU), Laboratoire IUSTI, CNRS UMR 7343, 5 Rue Enrico Fermi, 13453 Marseille Cedex, France

safir.haddad@irsn.fr, samuel.vaux@irsn.fr, kevin.varrall@univ-amu.fr, olivier.vauquelin@univ-amu.fr

Résumé : (16 gras)

Dans cette étude, nous nous intéressons à la modélisation théorique d'un courant de gravité sur un plan inclinable. Ce type d'écoulement, communément rencontré dans des situations naturelles ou accidentelles (écoulement de fumée issue d'un incendie, rejets de polluants, etc.), se forme lorsqu'un fluide se déplace, principalement de manière longitudinale, dans un fluide environnant de masse volumique différente (Ungarish [16]). Afin de modéliser la dynamique de ce type d'écoulement, nous considérons un courant de gravité issu d'un rejet continu d'un fluide léger (mélange air/hélium) de vitesse et de masse volumique contrôlées. Après une phase initiale de développement au cours de laquelle le courant de gravité se propage le long de la paroi jusqu'à son extrémité, le courant de gravité atteint alors un régime stationnaire.

Dans le cadre du régime stationnaire, l'objectif est d'établir un modèle théorique et de déterminer l'évolution longitudinale des grandeurs caractéristiques (vitesse, masse volumique et épaisseur) et du nombre de Richardson associé (correspondant au rapport flottabilité / inertie) du courant de gravité sur toute la longueur du plan inclinable.

Dans un premier temps, nous avons étendu le modèle théorique d'Ellison et Turner [7], basé sur des équations bilans (masse, quantité de mouvement et énergie) dans un volume élémentaire du courant de gravité dans le cadre Boussinesq (i.e. écart relatif faible entre la masse volumique du courant et celle de l'air ambiant), au cadre général non-Boussinesq. Ce nouveau modèle, composé d'équations différentielles couplées, nous permet d'estimer théoriquement la variation des trois quantités d'intérêt (vitesse, hauteur et masse volumique) à l'aide d'une résolution numérique. Dans le cas d'un courant initialement inertiel ($Ri < 1$), le modèle admet une singularité mathématique lorsque l'écoulement atteint le régime critique ($Ri = 1$). Afin de résoudre ce problème, nous avons introduit une discontinuité, similaire à un ressaut hydraulique (Dhar et al. [6]), permettant la transition directe d'un état inertiel à un état sous-critique ($Ri > 1$) et une retranscription plus fidèle de la dynamique du courant de gravité étudié.

Dans un second temps, afin de confronter cette approche théorique à des courants de gravité de référence, nous avons réalisé des simulations aux grandes échelles avec le logiciel CALIF³S-Isis qui confirment l'existence de la transition entre régimes inertiel et sous-critique ainsi que l'influence de l'angle d'inclinaison du plan sur le comportement de l'écoulement. En effet, dans le cas d'un courant initialement inertiel devenant sous-critique, l'augmentation de l'angle d'inclinaison réduit l'amplitude

du saut jusqu'à la disparition de ce dernier pour un angle théorique défini. Pour des angles encore plus importants, il est également possible d'observer un changement de comportement de l'écoulement dès l'injection. En effet, l'écoulement initialement inertiel, devient de plus en plus inertiel dès l'injection contrairement aux cas évoqués précédemment.

L'angle d'inclinaison joue donc un rôle prépondérant dans ce type de configuration et son rôle, analogue à l'entraînement dans les équations du modèle, permet d'augmenter le mélange entre le courant et le fluide ambiant. Bien que ce modèle soit simple et que la transition soit brutale, ce dernier permet de reproduire, avec un niveau de précision acceptable, l'évolution de la vitesse, de la masse volumique et de l'épaisseur de la couche.

Abstract :

In this study, we are interested in the theoretical modelling of a gravity current on a tiltable plane. This type of flow is formed when a fluid moves, mainly longitudinally, in a surrounding fluid of different density (Ungarish [16]). To model the dynamics of this type of flow, we consider a gravity flow from a continuous discharge of a light fluid of controlled velocity and density.

The gravity flow reaches a steady state after an initial development stage during which the gravity flow propagates along the wall to its end. In this stationary regime, the objective is to establish a theoretical model and to determine the longitudinal evolution of the characteristic quantities (velocity, density and thickness) and the associated Richardson number (corresponding to the buoyancy/inertia ratio) of the gravity current along the entire length of the tiltable plane.

In a first step, we have extended the theoretical model of Ellison and Turner [7], based on balance equations (mass, momentum and energy), developed in the Boussinesq case (i.e. when the relative difference between the density of the current and the one of the ambient air is not relevant) to the general non-Boussinesq framework. This new model enables to theoretically estimate the variation of the main three quantities of the current (velocity, height and density). In the case of an initially inertial flow ($Ri < 1$), the model admits a mathematical singularity when the flow reaches the critical regime ($Ri = 1$). To solve this problem, we have introduced a discontinuity, similar to a hydraulic jump (Dhar et al. [6]), allowing a direct transition from an inertial state to a subcritical state ($Ri > 1$) and a more accurate transcription of the dynamics of the gravity current.

Secondly, to compare this theoretical approach with reference gravity flows, we have carried out Large Eddy Simulations with the CALIF³S-Isis software. These simulations confirmed the transition between the inertial and subcritical regimes. They also highlight the influence of the slope angle on the behaviour of the flow. Indeed, in the case of an initially inertial flow becoming subcritical, the increase of the slope angle reduces the amplitude of the jump until it disappears for a defined theoretical angle. For steeper slopes, we observe a change in the behaviour of the flow from the injection.

The slope angle thus plays a preponderant role in this type of configuration and its role, analogous to the entrainment in the governing equations, increases the mixing between the current and the ambient fluid. Although this model is simple with an abrupt transition, it can reproduce with an acceptable level of accuracy the evolution of the velocity, density and thickness of the layer.

Mots clefs : Courants de gravité inclinés - Effets non-Boussinesq - Modèle théorique - Simulations LES

1 Introduction

Un courant de gravité se forme lorsqu'un fluide se déplace longitudinalement dans un autre fluide de masse volumique différente. Ce type d'écoulement stratifié se développe naturellement en raison des forces gravitaires qui sont induites par des différences de masses volumiques (provenant par exemple d'une différence de salinité ou de température) entre le fluide en déplacement et celui environnant (Ungarish [16]). Dans le cas particulier où les deux fluides sont miscibles entre eux, le courant se mélange avec le fluide statique. Ce mélange est appelé entraînement. Ce type d'écoulement existe dans beaucoup de configurations naturelles (vents catabatiques), industrielles (rejets de polluants) ou accidentelles (fumées d'un incendie).

Pour les courants de gravité issus d'une injection continue, auxquels nous nous intéressons ici, l'écoulement se développe le long d'une paroi (Britter et Linden [4], Baines [1]) avant d'atteindre un état stationnaire. C'est dans cette configuration que s'inscrit l'article pionnier d'Ellison et Turner [7]. Ils développent un modèle théorique régissant l'évolution d'un courant de gravité Boussinesq (différence de masse volumique faible entre le courant et le fluide ambiant) faiblement turbulent. Leur modèle donne les évolutions longitudinales de la vitesse U , la masse volumique ρ et la hauteur h de la couche. Ils introduisent également un coefficient d'entraînement E , dépendant de la stabilité locale de la nappe, pour tenir compte du mélange entre le courant et le fluide ambiant. Afin de quantifier cette stabilité, ils utilisent le nombre de Richardson Boussinesq Ri_B qui est défini comme étant le rapport entre les forces de flottabilité et les forces d'inertie de la nappe ($Ri_B = \Delta\rho gh \cos(\theta) / \rho_a U^2$, avec $\Delta\rho = \rho - \rho_a$, où ρ_a est la masse volumique du fluide ambiant et θ est l'angle d'inclinaison de la paroi). Ils définissent trois états pour ce type d'écoulements : l'état supercritique ($Ri_B < 1$), l'état critique ($Ri_B = 1$) et l'état sous-critique ($Ri_B > 1$). Ils relèvent aussi qu'il existe une pente pour laquelle le nombre de Richardson n'évolue plus (état "normal").

Par la suite, peu d'études se sont intéressées à la résolution des équations proposées par Ellison et Turner [7] à cause d'une singularité empêchant leur résolution. Une méthode développée par Guo et al. [9] existe, mais ne conserve pas les flux. C'est pour cela que nous proposons dans cet article une nouvelle méthode de résolution des équations d'Ellison et Turner [7] pour un courant de gravité initialement supercritique. En introduisant une discontinuité similaire à un ressaut hydraulique, il est possible de transiter d'un état supercritique à un état sous-critique sans passer par la singularité (Dhar et al. [6]). Nous nous intéressons également au rôle de l'angle d'inclinaison dans ce modèle ainsi qu'à son impact sur la discontinuité.

2 Théorie

Nous considérons un courant de gravité stationnaire 2D se développant sur une paroi de longueur L , incliné d'un angle θ par rapport à l'horizontale comme représenté sur la figure 1. Un fluide est injecté par une buse de hauteur h_i , avec une vitesse U_i et une masse volumique ρ_i dans un fluide ambiant au repos de masse volumique ρ_a . Les valeurs moyennes de l'écoulement selon l'axe x de propagation du courant sont notées $U(x)$, $h(x)$ et $\rho(x)$ et sont obtenues à partir des formulations intégrales des flux de

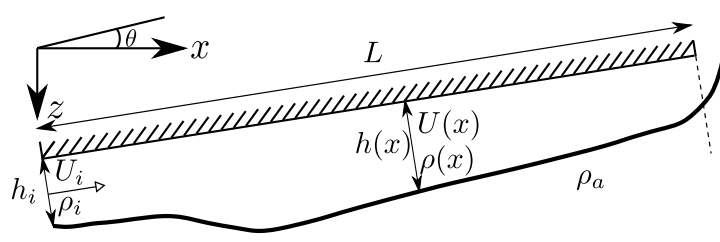


FIGURE 1 – Diagramme du courant de gravité

volume, masse et quantité de mouvement suivantes :

$$\rho(x) U(x) h(x) = \int_0^\infty \rho(x, z) u(x, z) dz, \quad (1)$$

$$U(x) h(x) = \int_0^\infty u(x, z) dz, \quad (2)$$

$$\rho(x) U(x)^2 h(x) = \int_0^\infty \rho(x, z) u(x, z)^2 dz, \quad (3)$$

où $u(x, z)$ est la vitesse locale du courant et $\rho(x, z)$ sa masse volumique locale. Pour ne pas alourdir l'écriture, $U(x)$, $h(x)$ et $\rho(x)$ ont été remplacées dans la suite de l'article par respectivement U , h et ρ .

Les équations régissant cet écoulement sont établies dans le cas général non-Boussinesq à l'aide des équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de la flottabilité. On obtient :

$$\frac{d(\rho U h)}{dx} = E U \rho_a, \quad (4)$$

$$\frac{d(\rho U^2 h)}{dx} = -C_D U^2 \rho - \frac{1}{2} \frac{d(\Delta \rho g h^2 \cos(\theta))}{dx} + \Delta \rho g h \sin(\theta), \quad (5)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\Delta \rho}{\rho_a} g U h \right) = 0, \quad (6)$$

avec E le coefficient d'entraînement et C_D le coefficient de frottement. Les termes de droite de l'équation (5) représentent respectivement le frottement turbulent avec la paroi inclinée, la force de pression liée au changement d'épaisseur de la nappe et la force de flottabilité motrice liée à l'inclinaison et à la différence de masse volumique entre les deux fluides. Les équations (4), (5) et (6) peuvent être combinées afin d'obtenir le système d'équations différentielles couplées suivant :

$$\frac{dh}{dx} = \frac{\left(1 + \frac{\rho_a}{\rho} - \frac{1}{2} \text{Ri}\right) E - \text{Ri} \tan(\theta) + C_D}{(1 - \text{Ri})}, \quad (7)$$

$$\frac{dU}{dx} = -\frac{U}{h} \frac{\left(\frac{\rho_a}{\rho} + \frac{1}{2} \text{Ri}\right) E - \text{Ri} \tan(\theta) + C_D}{(1 - \text{Ri})}, \quad (8)$$

$$\frac{d\rho}{dx} = \frac{\Delta \rho E}{h}, \quad (9)$$

avec Ri , le nombre de Richardson non-Boussinesq, défini comme étant :

$$\text{Ri} = \frac{\Delta \rho g h \cos(\theta)}{\rho U^2}. \quad (10)$$

On peut combiner les équations (7), (8), (9) et (10) afin d'obtenir l'équation suivante :

$$\frac{d\text{Ri}}{dx} = \frac{\text{Ri}}{h} \frac{\left(1 + 2\frac{\rho_a}{\rho}\right) \left(1 + \frac{\text{Ri}}{2}\right) E - 3 \text{Ri} \tan(\theta) + 3 C_D}{(1 - \text{Ri})}, \quad (11)$$

qui permet de calculer l'évolution longitudinale du nombre de Richardson.

En s'intéressant aux équations (7), (8) et (11), on voit qu'elles présentent une singularité mathématique lorsque le nombre de Richardson est égal à 1. Nous allons discuter dans ce qui suit des différents cas où il est nécessaire de traiter ou non cette singularité.

2.1 Cas horizontal : ressaut hydraulique

On considère un courant de gravité se développant le long d'une paroi horizontale. A partir d'une certaine longueur, le nombre de Richardson atteint l'unité et la résolution des équations (7), (8) et (11) n'est plus possible. Afin d'éviter cette singularité, nous introduisons une discontinuité mathématique qui d'un point de vue physique traduirait la présence d'un ressaut hydraulique. Ce ressaut permet le passage de l'état supercritique à l'état sous-critique.

A l'aide des équations de conservation et de celles du saut (l'indice "1" représente les quantités avant le saut et l'indice "2" les quantités après le saut), on retrouve les relations de Bélanger qui lient les quantités en aval du ressaut avec les quantités en amont :

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{\sqrt{1 + \frac{8}{\text{Ri}_1}} - 1}{2}, \quad (12a) \quad \frac{\text{Ri}_2}{\text{Ri}_1} = \frac{1}{8} \left(\sqrt{1 + \frac{8}{\text{Ri}_1}} - 1 \right)^3. \quad (12b)$$

Ces équations indiquent que pour un écoulement supercritique en amont du saut, on obtient un écoulement sous-critique en aval du saut avec un nombre de Richardson qui décroît de façon monotone jusqu'à la sortie du domaine après le saut. La sortie de notre domaine étant considérée comme un déversoir, le nombre de Richardson doit être très proche de l'unité à ce point (Henderson [11], Graf et Altinakar [8]). Cette condition de sortie ($\text{Ri}(x = L) \approx 1$) nous permet d'obtenir une localisation du saut sur l'axe x . La position du saut doit permettre de respecter simultanément les équations de Bélanger (12a), (12b) et l'état critique à la sortie.

2.2 Cas incliné : absence de saut

En ajoutant un angle d'inclinaison à l'équation (11), la discontinuité disparaît lorsque :

$$\theta > \arctan \left(\frac{\left(1 + 2\frac{\rho_a}{\rho}\right) \left(1 + \frac{\text{Ri}}{2}\right) E + 3 C_D}{3 \text{Ri}} \right). \quad (13)$$

A partir de l'équation (13), deux comportements distincts existent :

- $\text{Ri} = 1$ dans (13). C'est l'angle minimum à partir duquel le saut n'existe plus. Le numérateur de (11) est positif puis s'annule. Ri croît puis reste constant et l'écoulement atteint l'état normal évoqué dans le paragraphe 1 (Ellison et Turner [7], Turner [15]). Britter et Linden [4] trouvent un angle voisin de 0.5° .
- $\text{Ri} = \text{Ri}_{\text{injection}}$ dans (13). C'est l'angle minimum à partir duquel un changement de comportement apparaît. Le numérateur de (11) est négatif puis s'annule. Ri décroît puis reste constant et l'écoulement atteint à nouveau l'état normal. Baines [2] trouve un angle voisin de 20° .

3 Configuration des simulations

Nous considérons un rejet continu d'un gaz plus léger que l'air sur une paroi allant de 0 à 77° afin de simuler un courant de densité non-Boussinesq turbulent. Les essais sont répertoriés dans le tableau 1. La gamme de Ri varie entre 0.01 et 0.24. Les simulations LES sont réalisées avec le logiciel de CFD CALIF³S-Isis (développé par l'Institut de Radioprotection et de Sécurité Nucléaire (IRSN)). Concernant la durée des simulations, nous fixons une durée assez grande afin de nous assurer une convergence temporelle des valeurs moyennes du courant.

Cas N°	U_i (m/s)	h_i (m)	ρ_i (kg/m ³)	Ri_i	Re	θ (°)	L (m)
Cas 1	6.3	0.2	1	0.01	65 895	0	9
Cas 2	1.3	0.2	1	0.24	13 684	0	9
Cas 3	1.3	0.2	1	0.22	13 684	20	9
Cas 4	1.3	0.2	1	0.05	13 684	77	9

TABLE 1 – Paramètres d'injection des simulations réalisées

4 Résultats

4.1 Loi d'entraînement et coefficient de frottement

Afin de résoudre les équations (7), (8) et (9), il nous faut fixer certains paramètres. Concernant le coefficient de frottement, nous avons opté pour la valeur préconisée par Kunsch [14] ($C_D = 0.0065$), également utilisée par Chow et al. [5]. Concernant la loi d'entraînement, il n'existe pas de loi universelle dans la littérature. Nous avons choisi d'utiliser la loi proposée par van Kessel et Kranenburg [17], car elle repose sur des considérations théoriques et qu'elle est continue sur la gamme de Richardson étudiée. Celle-ci s'écrit :

$$E = \left(\frac{5.5 \times 10^{-3}}{3.6 Ri_B - 1 + \sqrt{(3.6 Ri_B - 1)^2 + 0.15}} \right). \quad (14)$$

Cette loi n'est valable que dans le cas faiblement ou non-incliné. Or, d'après les résultats de Baines [3], Ellison et Turner [7] ou Britter et Linden [4], il existe un surentraînement lié à l'angle d'inclinaison. Dans les cas inclinés, nous utiliserons la loi de Hopfinger [12] :

$$E = 9.5 (\theta + 5) 10^{-4}. \quad (15)$$

4.2 Comparaison entre les simulations et le modèle théorique

Les résultats obtenus par les simulations sont intégrés suivant l'axe z en utilisant les équations (1) - (3). Les grandeurs sont alors tracées jusqu'à 8 m de l'injection, car les dix derniers pour cent du domaine sont soumis à des effets de bords non-quantifiables. Pour les 4 cas présentés dans le tableau 1, nous comparons les évolutions longitudinales de la vitesse, de la hauteur, de la masses volumique et du nombre de Richardson.

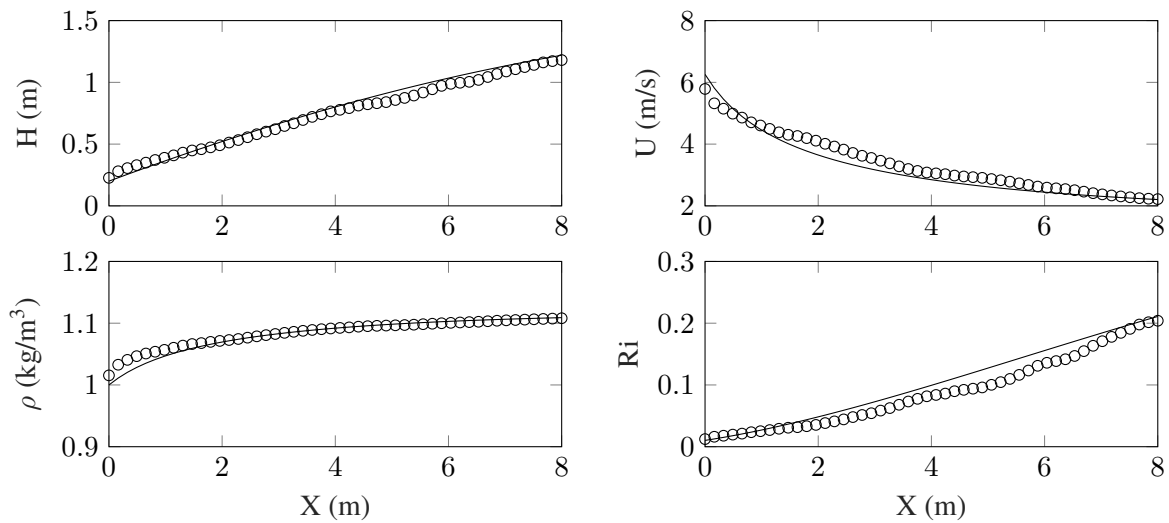


FIGURE 2 – Comparaison entre les données théoriques (ligne continue) et les données numériques (ronds) pour le cas 1.

Pour le cas 1, le courant de gravité est fortement turbulent et inertiel. Ici, le courant reste dans un état supercritique tout au long de son développement. Les quantités évoluent de façon monotone et Ri n'atteint pas l'unité. Les comparaisons avec le modèle (figure 2) sont satisfaisantes d'un point de vue qualitatif et quantitatif.

Pour le cas 2, le courant est moins inertiel que précédemment afin que l'écoulement atteigne le régime critique avant la sortie. Comme l'indique la figure 3, le comportement de l'écoulement est non-monotone pour la vitesse, l'épaisseur et le nombre de Richardson. Ce dernier atteint rapidement un maximum avant de décroître plus lentement. Dans ce cas, le modèle théorique prévoit un saut qui permet de reproduire ce comportement non-monotone. D'un point de vue quantitatif, on observe des différences liées à la soudaineté du saut théorique.

Pour le cas 3, le mur est modérément incliné. Ce cas ne présente pas de saut théorique car en calculant

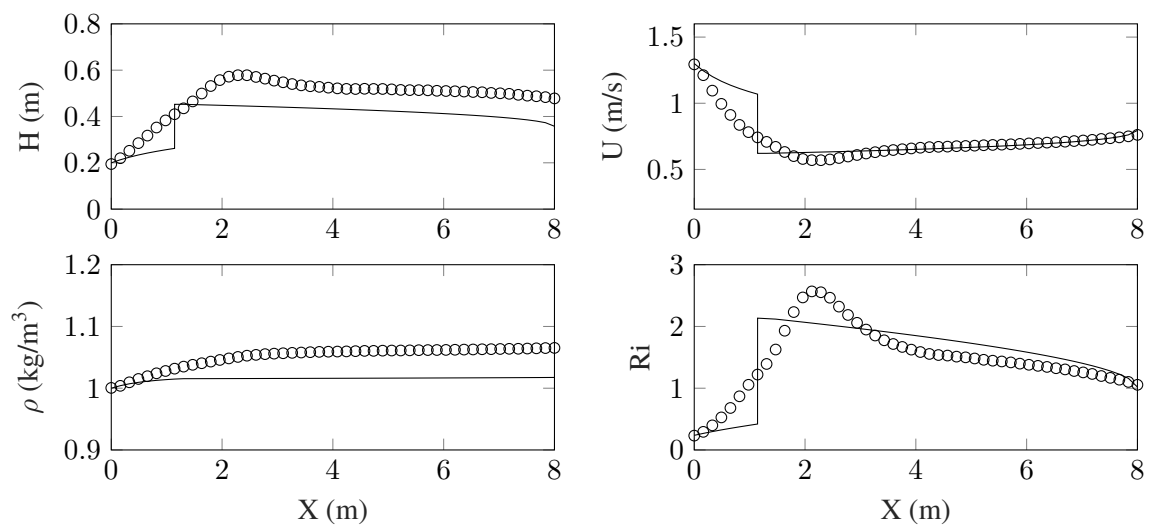


FIGURE 3 – Comparaison entre les données théoriques (ligne continue) et les données numériques (ronds) pour le cas 2.

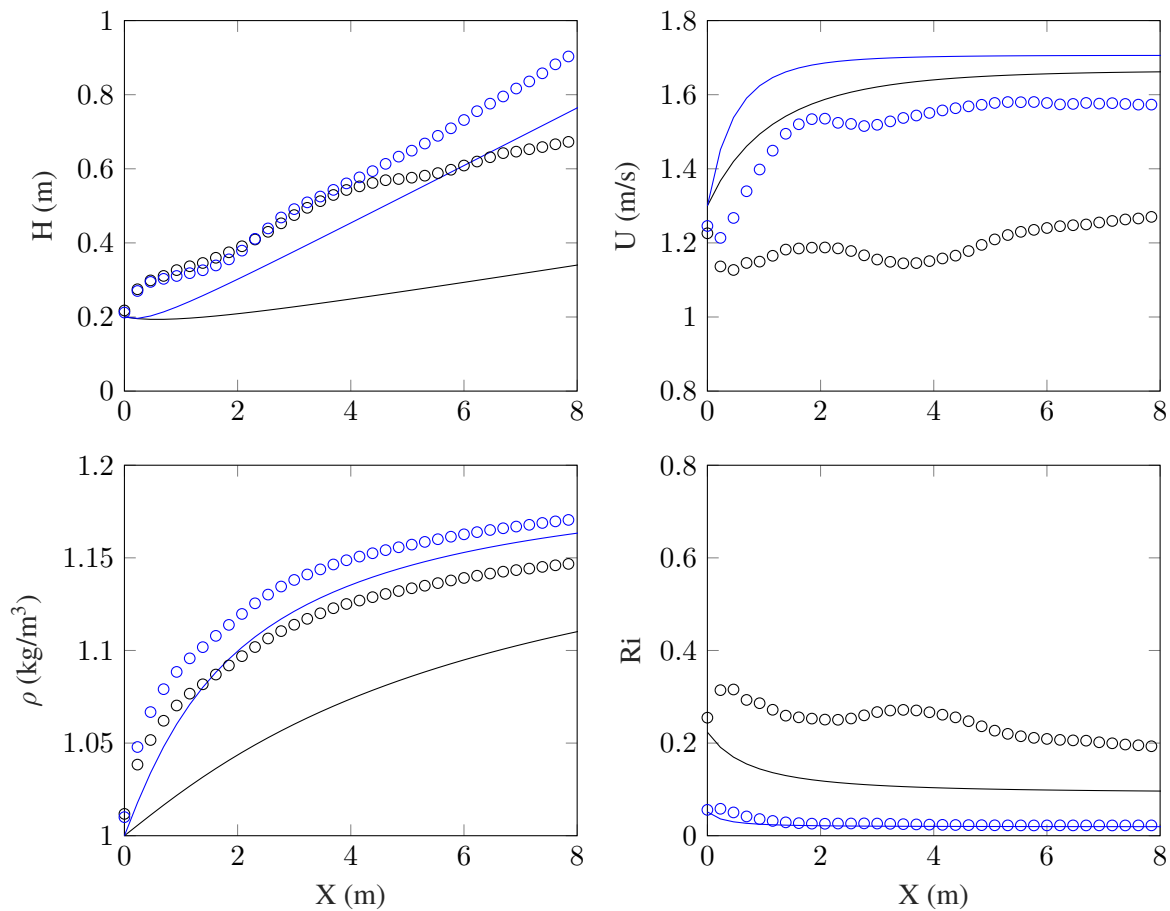


FIGURE 4 – Comparaison entre les données théoriques (ligne continue) et les données numériques (ronds) pour le cas 3 (noir) et le cas 4 (bleu)

l'angle de non-saut (en prenant $Ri = 1$) à partir de (13), on trouve $\theta \approx 0.5^\circ$. Cela est confirmé, car l'écoulement n'atteint pas la valeur unitaire et reste en état supercritique. Il n'y a pas de changement de comportement sur la figure 4. Le nombre de Richardson est cependant intéressant à observer. Ici, il augmente légèrement avant de diminuer et d'atteindre une valeur proche de celle à l'injection. Ce type de comportement est observable lorsque l'on se rapproche de l'angle du changement de comportement, qui est ici d'environ 10° (en prenant $Ri = Ri_{inj}$ dans (13)). Pour les comparaisons avec le modèle, les tendances sont bien reproduites qualitativement, sauf pour le nombre de Richardson et la vitesse sur les premiers mètres. Quantitativement, il existe des différences entre le modèle et les simulations. Ces différences viennent du fait que l'écoulement est incliné et que le modèle d'entraînement n'est pas assez fin pour des écoulements inclinés.

Le cas 4 correspond à un cas fortement incliné. Dans ce cas, l'angle de changement de comportement a déjà été dépassé. On peut le voir sur la figure 4 avec le nombre de Richardson qui diminue, avant de tendre vers une valeur inférieure à sa valeur à la source. Pour les comparaisons avec le modèle, on voit que les comportements sont bien reproduits, d'un point de vue qualitatif et quantitatif, même si le modèle ne tient pas compte du premier mètre en sortie d'injection. Des phénomènes liés à la buse d'injection non modélisés sont à l'origine de ces différences. Le modèle d'entraînement est adapté pour cette gamme d'angle car il dépend de moins en moins de la stabilité locale, et l'hypothèse de l'entraînement constant est plus cohérente pour ce cas.

5 Conclusions

Nous nous sommes intéressés à la dynamique d'un courant de gravité non-Boussinesq, stationnaire, turbulent et inertiel se déplaçant le long d'un mur incliné. Nous avons étendu les équations de conservation d'Ellison et Turner [7] dans le cas général non-Boussinesq. A l'aide d'une discontinuité similaire à un saut, nous avons évité la singularité présente dans le système d'équations lorsque le nombre de Richardson est égal à 1. Nous avons également pu trouver deux angles théoriques qui modifient le comportement de l'écoulement.

Nous avons comparé ces données théoriques avec des simulations LES. Le modèle permet de prédire avec une précision acceptable les variables d'intérêts de manière qualitative et quantitative dans les cas sans angle ou avec un fort angle d'inclinaison ($\theta \gtrsim 70^\circ$). Dans le cas d'angles d'inclinaison plus modérés, les résultats sont moins cohérents. Cela vient du fait que le modèle d'entraînement utilisé ne permet pas de prendre en compte de manière assez fine l'angle d'inclinaison (Baines [3]).

Afin d'améliorer ce modèle, plusieurs pistes existent. Dans le cas avec un saut, on peut ajouter une longueur (Hager et al. [10]) ou un entraînement dans le saut (Wilkinson et Wood [18]). Ces deux paramètres permettent une modélisation moins brusque de la transition. Enfin, plus généralement, l'ajout d'un terme représentant l'évolution de l'énergie cinétique turbulente dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement (Hornung et al. [13]) permet aussi d'améliorer la capacité du modèle à tenir compte de la physique. Ce terme tient compte de l'écart entre les valeurs moyennes et réelles des vitesses et masses volumiques.

Références

- [1] P. G. Baines. Mixing in flows down gentle slopes into stratified environments. *J. Fluid Mech.*, 443 :237–270, 2001.
- [2] P. G. Baines. Mixing regimes for the flow of dense fluid down slopes into stratified environments. *J. Fluid Mech.*, 538 :245–267, 2005.
- [3] P. G. Baines. Mixing in downslope flows in the ocean - plumes versus gravity currents. *Atmos. - Ocean*, 46(4) :405–419, 2008.
- [4] R. E. Britter et P. F. Linden. The motion of the front of a gravity current travelling down an incline. *J. Fluid Mech.*, 99(3) :531–543, 1980.
- [5] W. K. Chow, Y. Gao, J. H. Zhao, J. F. Dang, C. L. Chow, et L. Miao. Smoke movement in tilted tunnel fires with longitudinal ventilation. *Fire Saf. J.*, 75 :14–22, 2015.
- [6] M. Dhar, G. Das, et P. K. Das. Planar hydraulic jumps in thin film flow. *J. Fluid Mech.*, 884, 2020.
- [7] T. H. Ellison et J. S. Turner. Turbulent entrainment in stratified flows. *J. Fluid Mech.*, 6(3) : 423–448, 1959.
- [8] W. H. Graf et S. Altinakar. *Hydraulique fluviale : Ecoulement et phénomènes de transport dans les canaux à géométrie simple*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, traité de edition, 2000.
- [9] Q. Guo, Y. Z. Li, H. Ingason, Z. Yan, et H. Zhu. Theoretical studies on buoyancy-driven ceiling jets of tunnel fires with natural ventilation. *Fire Saf. J.*, 119(January 2020), 2021.
- [10] W. H. Hager, R. Bremen, et N. Kawagoshi. Classical hydraulic jump : length of roller. *J. Hydraul. Res.*, 28(5) :591–608, 1990.
- [11] F. Henderson. *Open Channel Flow*, 1966.
- [12] E. J. Hopfinger. Snow avalanche motion and related phenomena. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 15(1) :47–76, 1983.
- [13] H. G. Hornung, S. Turner, et C. Willert. The flow field downstream of a hydraulic jump. *J. Fluid Mech.*, 287 :299–316, 1995.
- [14] J. P. Kunsch. Critical velocity and range of a fire-gas plume in a ventilated tunnel. *Atmos. Environ.*, 33(1) :13–24, 1998.
- [15] J. Turner. Turbulent entrainment : the development of the entrainment assumption, and its application to geophysical flows. *J. Fluid Mech.*, 173 :431–471, 1986.
- [16] M. Ungarish. *An Introduction to Gravity Currents and Intrusions*. CRC Press, 2009.
- [17] T. van Kessel et C. Kranenburg. Gravity Current of Fluid Mud on Sloping Bed. *J. Hydraul. Eng.*, 122(12) :710–717, 1996.
- [18] D. L. Wilkinson et I. R. Wood. A rapidly varied flow phenomenon in a two-layer flow. *J. Fluid Mech.*, 47(2) :241–256, 1971.