



**HAL**  
open science

# Analyse d'une expérimentation exhibant une instabilité dans un liquide avec un modèle réduit non linéaire fluide-structure

Quentin Akkaoui, Evangéline Capiez-Lernout, Christian Soize, Roger Ohayon

► **To cite this version:**

Quentin Akkaoui, Evangéline Capiez-Lernout, Christian Soize, Roger Ohayon. Analyse d'une expérimentation exhibant une instabilité dans un liquide avec un modèle réduit non linéaire fluide-structure. CSMA 2019, 14ème Colloque National en Calcul des Structures, May 2019, Presqu'île de Giens (Var) Giens (Var), France. pp.1-7. hal-02175587

**HAL Id: hal-02175587**

**<https://hal.science/hal-02175587>**

Submitted on 9 Jul 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Analyse d'une expérimentation exhibant une instabilité dans un liquide avec un modèle réduit non linéaire fluide-structure.

Q. Akkaoui<sup>1</sup>, E. Capiez-Lernout<sup>1</sup>, C. Soize<sup>1</sup>, R. Ohayon<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire Modélisation et Simulation Multi Echelle (MSME) UMR 8208 CNRS, 5 boulevard Descartes, Marne-La-Vallée 77454, France {quentin.akkaoui, evangeline.capiez-lernout, christian.soize}@u-pem.fr

<sup>2</sup> Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés, Conservatoire National des Arts et Métiers (CNAM), 2 rue Conté, Paris 75003, France, roger.ohayon@lecnam.net

**Résumé** — Cet article propose de revisiter et d'expliquer, au travers d'un modèle réduit numérique fluide-structure, une observation expérimentale d'un phénomène de résonance de la surface libre d'un liquide dans un réservoir cylindrique. Le système expérimental a été simulé par un modèle numérique du cylindre élastique en présence de non-linéarités géométriques, partiellement rempli d'un liquide acoustique prenant en compte les effets de ballottement. Les résultats obtenus montrent qu'une excitation *inattendue* de grande amplitude des modes de ballottement a lieu lorsque la structure est excitée sur certaines de ses résonances.

**Mots clés** — Interactions fluide-structure, non-linéarités géométriques, vibrations, ballottement, modèle réduit non linéaire.

## 1 Contexte de la recherche

Une expérience menée par Lindholm, Kana et Abramson en 1962 ([6]), initialement définie pour quantifier l'influence d'un liquide sur les vibrations élastiques d'un réservoir cylindrique, a mis en évidence un phénomène *inattendu* d'excitation de grande amplitude des mouvements basses fréquences de la surface libre du liquide. En effet, lorsque le réservoir est sollicité sur certaines de ses résonances propres, une vibration de grande amplitude du ballottement de la surface du liquide est constatée. Cette observation est d'autant plus *inhabituelle* que la séparation d'échelle entre la fréquence fondamentale du réservoir et celle du ballottement de la surface est d'ordre 100. Une seconde expérience [1] suggère que ce phénomène *inattendu* serait dû à plusieurs *caractéristiques inhabituelles ne pouvant être encore expliquées avec les théories actuelles* (cité de [1]). Ces auteurs ont conclu à la nécessité d'études numériques plus complètes et d'investigation alternative de non-linéarités de structure. C'est ce que propose cette étude à la suite de formulations adéquates en linéaire fluide et non linéaire structure.

La présente recherche propose une explication possible du phénomène observé dans ces expériences, au travers d'un modèle numérique permettant la prise en compte des couplages élasto-acoustiques entre un fluide acoustique linéaire et une structure avec des effets non linéaires géométriques. Une attention particulière est apportée à la compréhension des couplages entre chaque sous-partie du système (structure, liquide et surface libre), c'est pourquoi la formulation choisie pour modéliser le système est celle proposée dans [9]. Cette formulation apporte plusieurs avantages liés à l'utilisation d'un modèle réduit numérique non linéaire (NLROM). En effet, ce NLROM permet de mieux identifier les couplages entre chaque sous-partie du système ; il permet également de filtrer une partie des modes propres afin d'éviter les problèmes liés à la séparation d'échelle entre les fréquences propres de chaque sous-système ; il permet de s'affranchir du problème lié au calcul de modes propres globaux induit par la formulation non symétrique du problème ; il permet enfin de réduire considérablement le coût numérique de la simulation. La présentation détaillée de la modélisation numérique ainsi que l'étude numérique complète du système est proposée dans [3].

Ce papier présente brièvement dans la section 2 le modèle numérique utilisé pour la simulation du phénomène observé expérimentalement. Les équations discrétisées par la méthode des éléments finis sont présentées ainsi que la formulation du modèle réduit non linéaire. Dans la section 3 on s'intéresse

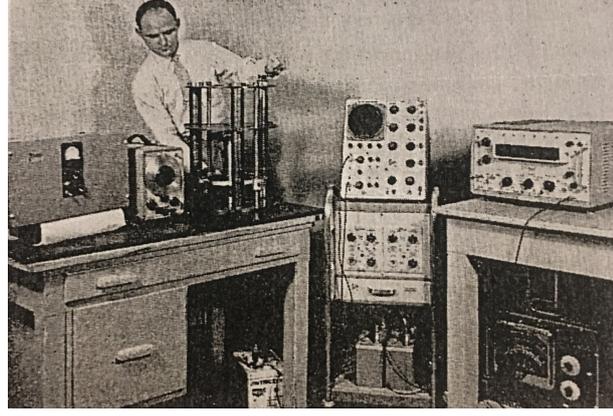
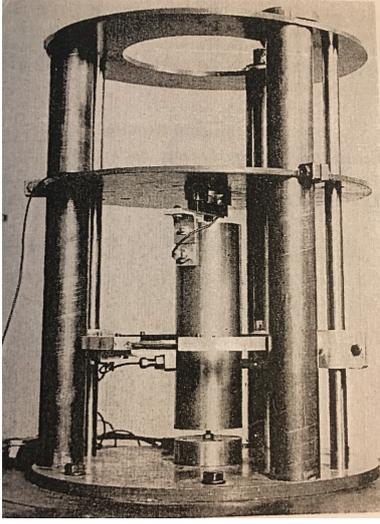


FIGURE 1 – Images (tirées de [6]) du dispositif expérimental utilisé pour la caractérisation des modes de vibrations d'un cylindre partiellement rempli de liquide.

aux résultats numériques obtenus permettant de comprendre le phénomène de transfert d'une excitation "basse fréquence" de la structure à une excitation "très basse fréquence" de ballonnement du liquide.

## 2 Modèle numérique

### 2.1 Equations discrétisées par éléments finis du problème couplé

Le problème couplé fluide-structure est exprimé en fonction de 3 champs inconnus  $(p, \eta, \mathbf{u})$  désignant la pression dans le fluide acoustique, l'élévation normale de la surface libre et le déplacement de la structure. On note  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{U}$  les vecteurs correspondants issus de la discrétisation éléments finis de ces champs. Les équations discrétisées du problème couplé fluide-structure non linéaire s'écrivent alors

$$[M]\ddot{\mathbf{P}} + [D]\dot{\mathbf{P}} + [K]\mathbf{P} - [C_{p\eta}]^T \ddot{\mathbf{H}} - [C_{pu}]^T \ddot{\mathbf{U}} = 0, \quad (1)$$

$$[C_{p\eta}]\mathbf{P} + [K_{gc}]\mathbf{H} + [C_{\eta u}]\mathbf{U} = 0, \quad (2)$$

$$[C_{pu}]\mathbf{P} + [C_{\eta u}]^T \mathbf{H} + [M_u]\ddot{\mathbf{U}} + [D_u]\dot{\mathbf{U}} + [K_u]\mathbf{U} + \mathbf{F}_{NL}(\mathbf{U}) = \mathbf{F}_u, \quad (3)$$

où les matrices  $[M]$ ,  $[D] = \tau[K]$  et  $[K]$  désignent respectivement les matrices de masse, amortissement et raideur du fluide acoustique. De même, les matrices  $[M_u]$  et  $[D_u] = \tau_s[K_u]$  désignent les matrices de masse et d'amortissement de la structure élastique. La prise en compte des grands déplacements et grandes déformations de la structure conduit à séparer les contributions de raideur de l'opérateur de rigidité en trois parties : une partie linéaire notée  $[K_u]$ , et deux parties non linéaires (quadratique et cubique) traduites par un vecteur force non linéaire  $\mathbf{F}_{NL}(\mathbf{U})$ . Les opérateurs de couplages  $[C_{pu}]$ ,  $[C_{p\eta}]$  et  $[C_{\eta u}]$  caractérisent respectivement les couplages entre la structure et le liquide, entre le liquide et la surface libre et entre la structure et la surface libre.

Les ressources numériques requises pour la résolution du système d'équations différentielles couplées (Eqs. (1)-(3)) sont très importantes. C'est pourquoi il est nécessaire d'introduire un modèle réduit adapté permettant de réduire le coût numérique des simulations.

### 2.2 Modèle réduit non-linéaire

Le modèle réduit non linéaire, détaillé dans [8, 3] s'écrit

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{H} \\ \mathbf{U} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\Phi_P] & [\Phi_{PH}] & 0 \\ 0 & [\Phi_H] & 0 \\ 0 & 0 & [\Phi_U] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}^p \\ \mathbf{q}^h \\ \mathbf{q}^u \end{bmatrix} = [\Psi]\mathbf{Q}, \quad (4)$$

où  $[\Phi_P]$ ,  $[\Phi_H]$ ,  $[\Phi_{PH}]$  et  $[\Phi_U]$  sont les matrices modales associées à chaque sous-système. Dans l'Eq. (4), le vecteur  $\mathbf{Q} = [\mathbf{q}^p \mathbf{q}^h \mathbf{q}^u]^T$  est le vecteur des coordonnées généralisées, solution de l'équation différentielle non-linéaire

$$[\mathcal{M}_{FSI}] \ddot{\mathbf{Q}} + [\mathcal{D}_{FSI}] \dot{\mathbf{Q}} + [\mathcal{K}_{FSI}] \mathbf{Q} + \mathcal{F}_{NL}(\mathbf{Q}) = \mathcal{F}, \quad (5)$$

où  $[\mathcal{M}_{FSI}]$ ,  $[\mathcal{D}_{FSI}]$  et  $[\mathcal{K}_{FSI}]$  sont les matrices réduites de masse, amortissement et raideur du système couplé fluide-structure. Dans l'Eq. (5),  $\mathbf{F}$  est le vecteur réduit des forces extérieures appliquées au système et  $\mathcal{F}_{NL}(\mathbf{Q})$  dénote la contribution conservative des forces non linéaires dues aux non-linéarités géométriques de la structure. Ces forces non linéaires sont exprimées par [7]

$$\mathcal{F}_{NL}(\mathbf{Q}) = \mathcal{K}_{\alpha\beta\gamma}^{(2)} q_\beta^u q_\gamma^u + \mathcal{K}_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)} q_\beta^u q_\gamma^u q_\delta^u, \quad (6)$$

où  $\mathcal{K}_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}$  et  $\mathcal{K}_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}$  sont les contributions quadratique et cubique des forces non linéaires, dont la construction numérique est décrite dans [5].

### 3 Explication du phénomène par la simulation numérique

Le système modélisé est celui décrit dans les publications [6, 1]. La hauteur totale du réservoir est  $h = 0.23876m$ , l'épaisseur de sa paroi est  $e = 2.286 \times 10^{-4}m$  et le rayon interne du cylindre est  $R_i = 2.76047 \times 10^{-2}m$ . Le cylindre est en acier (matériau homogène, élastique et isotrope) et ses propriétés matériaux sont  $E = 2.05 \times 10^{11}N.m^{-2}$ ,  $\nu = 0.29$  et  $\rho_s = 7800Kg.m^{-3}$ . Le réservoir est rempli à 30% d'eau dans laquelle la célérité du son est  $c_0 = 1480m.s^{-1}$  et qui a pour masse volumique  $\rho_0 = 1014Kg.m^{-3}$ . Les coefficients d'amortissement de la structure et du fluide sont  $\tau_s = 10^{-6}$  et  $\tau_f = 10^{-5}$ . La modélisation prenant en compte la capillarité, un calcul numérique est effectué en amont afin de déterminer la position d'équilibre du liquide dans le container en fonction de l'angle de contact et de la gravité [4].



FIGURE 2 – Maillage du système fluide-structure numérique étudié (2426975 dof).

#### 3.1 Calcul des modes propres

Les modes propres de la structure, du fluide et de la surface libre sont calculés en utilisant la méthodologie présentée dans [8] afin de construire la base de projection du modèle réduit numérique. Il est à noter que le calcul des bases de projection de chaque sous-système est issu d'un problème généralisé aux valeurs propres, qui, dans le cas de très gros modèles éléments finis, peut engendrer un coût numérique conséquent. Une solution pour contourner les problèmes de mémoire et de temps CPU induits par ces calculs est proposée dans [2]. La figure 3 montre quelques modes propres de chaque sous-système. Les deux figures de gauche montrent l'influence de la présence du liquide dans le réservoir sur les modes propres

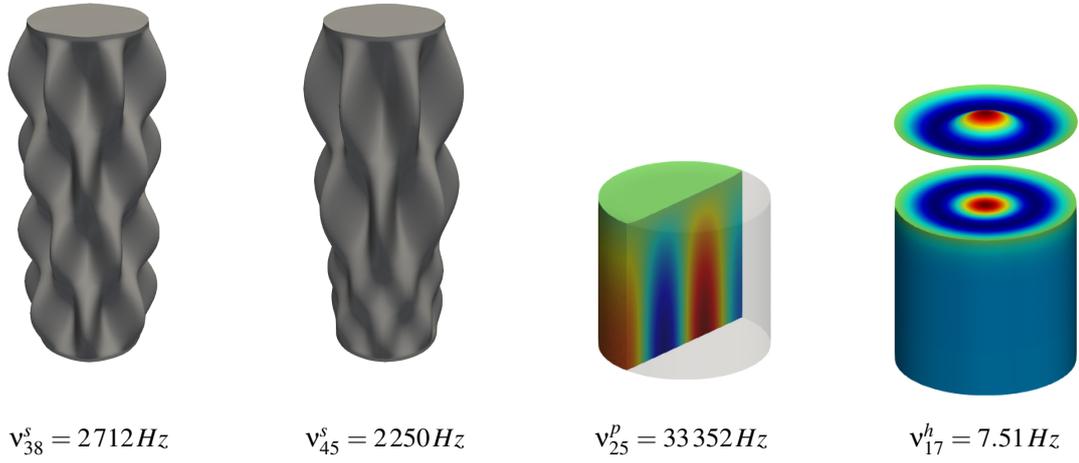


FIGURE 3 – Modes propres de chaque sous systèmes : mode propre de la structure sans prise en compte de l'influence du liquide interne (gauche); mode propre de la structure en tenant compte du liquide interne (milieu gauche); mode acoustique du liquide interne (milieu droite); mode de ballonnement de la surface libre et pression modale induite dans le liquide (droite).

élastiques du cylindre. Ce résultat coïncide avec les résultats expérimentaux présentés dans [6]. Le modèle numérique a été calibré sur le modèle expérimental en calant les fréquences propres numériques de la structure *in vacuo* sur les fréquences propres expérimentales. La figure 4 présente la correspondance des fréquences propres issues du modèle numérique par rapport à celles expérimentales en fonction des nombres d'onde longitudinaux et circonférentiels du mode associé.

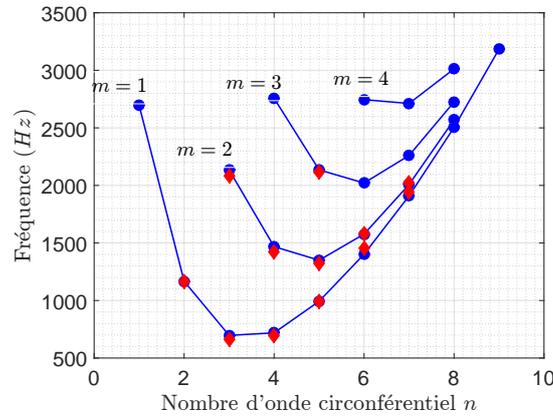


FIGURE 4 – Graphe de comparaison des fréquences propres expérimentales et numériques de la structure *in vacuo* en fonction du nombre d'onde longitudinal  $m$  et circonférentiel  $n$  des formes modales associées.

### 3.2 Excitation dynamique du système

On cherche à quantifier l'influence des non-linéarités structure sur la réponse dynamique du ballonnement de surface libre. On fait donc le choix d'exciter le système dans la bande d'excitation fréquentielle  $\mathbb{B}_e = [v_{min}, v_{max}]$ , avec  $v_{min} = 500 Hz$  et  $v_{max} = 2500 Hz$ , afin de n'exciter que les résonances de la structure (dont la fréquence fondamentale est  $v_1^s = 657 Hz$ ). L'excitation du système est localisée sur un côté du cylindre, à mi-hauteur et orientée radialement. Le vecteur des forces extérieures s'écrit alors

$$\mathbf{F}_u = \alpha g(t) \mathbb{F} \quad , \quad (7)$$

où  $\mathbb{F}$  est un vecteur normalisé caractérisant la répartition spatiale de l'excitation,  $\alpha$  est le coefficient d'intensité de la force et  $g(t)$  l'évolution temporelle de la force décrite par

$$g(t) = 2\Delta v \frac{\sin(\pi\Delta v t)}{\pi\Delta v t} \cos(2\pi s \Delta v t) \quad , \quad (8)$$

où  $\Delta v = v_{max} - v_{min}$  et  $s = \frac{v_{max} + v_{min}}{2\Delta v}$ . Il est à noter que la transformée de Fourier de  $g(t)$  donne lieu à une excitation fréquentielle uniforme dans  $\mathbb{B}_e$ .

### 3.3 Analyse des résultats numériques

Les résultats numériques sont obtenus en résolvant numériquement l'Eq. (5) dans le domaine temporel. L'analyse dynamique non linéaire des résultats est effectuée dans le domaine fréquentiel par transformée de Fourier des réponses temporelles. L'influence des effets non linéaires sur la réponse dynamique du système est réalisée en comparant les résultats du calcul "linéaire" (c.à.d. en considérant  $\mathbf{F}_{NL} = \mathbf{0}$ ) aux résultats du calcul non linéaire pour une même excitation du système. On observe les réponses du système en certains points d'intérêt. La réponse en déplacement de la structure est observée en un point de la ligne triple. La réponse en pression du fluide est observée en un point à mi-profondeur dans le liquide. La réponse de la surface est observée au même point que la structure, sur la ligne triple. D'une manière générale, les réponses en fréquence du système linéaire sont tracées en bleu et les réponses du système non linéaire sont tracées en rouge. La figure 5 présente les graphes  $v \mapsto |\widehat{U}_i(2\pi v)|$  ( $i = \{1, 2, 3\}$ ) des réponses fréquentielles des trois composantes du déplacement structure au point d'observation de la structure. La figure 6 présente le graphe  $v \mapsto |\widehat{P}(2\pi v)|$  de la réponse fréquentielle en pression au point d'observation du liquide (figure gauche) et le graphe  $v \mapsto |\widehat{H}(2\pi v)|$  de la réponse fréquentielle en élévation de surface au point d'observation de la surface libre (figure droite). Plusieurs phénomènes sont observables sur ces

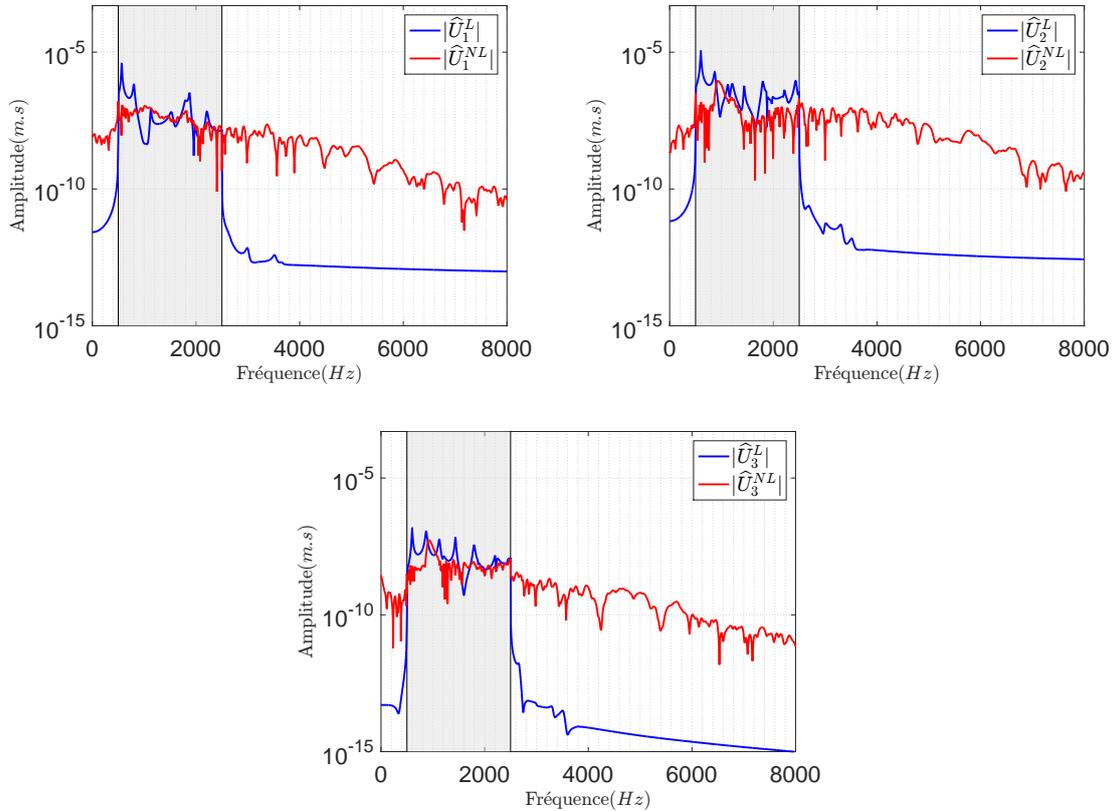


FIGURE 5 – Analyse de l'influence des non-linéarités : graphes de  $v \mapsto |\widehat{U}_1(2\pi v)|$  (haut gauche),  $v \mapsto |\widehat{U}_2(2\pi v)|$  (haut droite) et  $v \mapsto |\widehat{U}_3(2\pi v)|$  (milieu bas) .

résultats numériques : (i) l'amplitude des résonances dans la bande d'excitation  $\mathbb{B}_e$  est considérablement

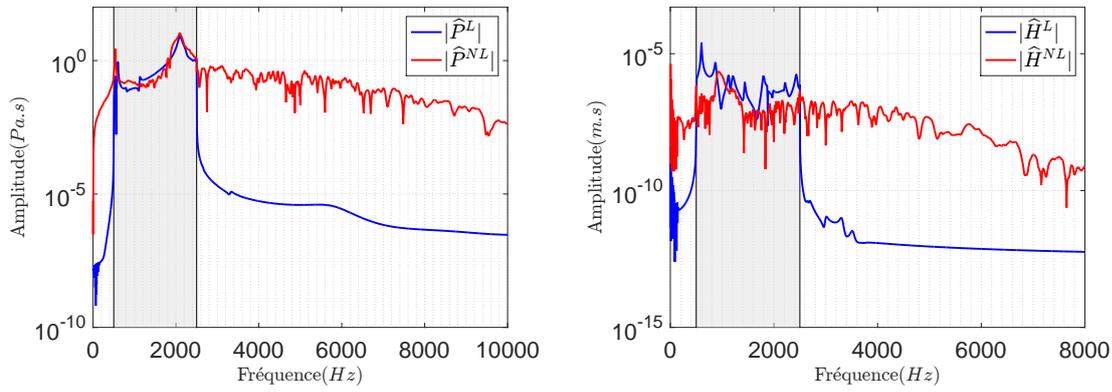


FIGURE 6 – Analyse de l’influence des non-linéarités : graphes de  $\nu \mapsto |\widehat{P}(2\pi\nu)|$  (gauche) et  $\nu \mapsto |\widehat{H}(2\pi\nu)|$

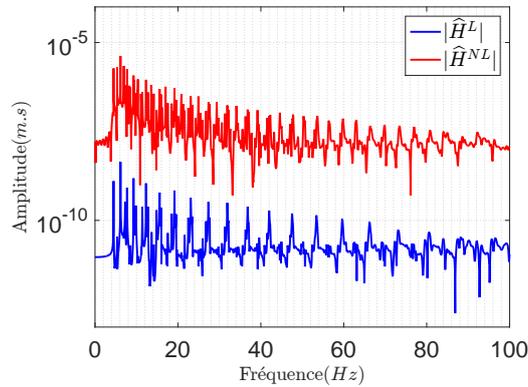


FIGURE 7 – Graphe de  $\nu \mapsto |\widehat{H}(2\pi\nu)|$  restreint sur la bande de fréquence  $[0, 100]$  Hz

réduite sur les réponses en  $\mathbf{U}$  et en  $\mathbf{H}$ ; (ii) un phénomène d’étalement des résonances est visible en particulier sur la figure 5 pour la résonance située à  $876$  Hz; (iii) des résonances sont visibles hors bande d’excitation, en haute et en basse fréquence. Plus particulièrement sur la réponse de la surface libre qui présente des résonances de ballottement de très basses fréquences et de grande amplitudes. La figure 7 présente la réponse en élévation de surface  $\nu \mapsto |\widehat{H}(2\pi\nu)|$  restreinte sur la bande de fréquence  $[0, 100]$  Hz. On peut distinctement voir l’amplification des résonances de ballottement à basses fréquences.

Ce phénomène d’excitation hors bande est dû à un transfert d’énergie, par les non-linéarités géométriques, de la structure vers le liquide. Ce transfert s’effectue depuis la bande d’excitation  $\mathbb{B}_e$  vers les basses et hautes fréquences, expliquant la réduction de l’amplitude des résonances dans  $\mathbb{B}_e$  et l’amplification des résonances hors bande. Une étude numérique de l’influence des opérateurs de couplage a été réalisée. Les résultats numériques ont alors montré que l’opérateur  $C_{\eta u}$  de couplage entre la structure et la surface libre, a peu d’influence sur la réponse dynamique du système. On peut donc affirmer que le transfert d’énergie par couplage *direct* entre la structure et la surface libre est négligeable.

## 4 Conclusion

Les résultats numériques présentés dans cette étude permettent de proposer une explication possible aux phénomènes observés dans les expériences menées dans [6, 1] : les non-linéarités de la structure induisent un transfert d’énergie vibratoire des moyennes fréquences vers les basses et très basses fréquences. La fréquence fondamentale du liquide étant supérieure à la borne supérieure de la bande d’excitation, le fluide a un comportement quasi statique dans le domaine basse fréquence. L’énergie, allant de la structure vers les basses fréquences, est donc transmise à travers le liquide à la surface libre. On peut donc conclure que le phénomène observé est dû à un transfert *indirect* d’énergie, par les non-linéarités

géométriques du réservoir, de la structure vers la surface libre du liquide. Une présentation détaillée de l'étude est proposée dans [3].

## Références

- [1] H.N. Abramson, D.D. Kana, U.S. Lindholm. *An experimental study of liquid instability in a vibrating elastic tank*, Journal of Spacecraft and Rockets, 3(8) :1183-1188, 1966.
- [2] Q. Akkaoui, E. Capiiez-Lernout, C. Soize, R. Ohayon. *Solving generalized eigenvalue problems for large scale fluid-structure computational models with mid-power computers*, Computers & Structures, Elsevier, 205 :45-54, 2018.
- [3] Q. Akkaoui, E. Capiiez-Lernout, C. Soize, R. Ohayon. *Revisiting the experiment of a free-surface resonance of a liquid in a vibration tank using a nonlinear fluid-structure computational model*, Journal of Fluids and Structures, en mineure révision, 2018.
- [4] K. A. Brakke. *The surface evolver*, Experimental Mathematics, Taylor & Francis, 1 :141-165, 1992.
- [5] E. Capiiez-Lernout, C. Soize, M.P. Mignolet. *Computational stochastic statics of an uncertain curved structure with geometrical nonlinearity in three-dimensional elasticity*, Springer, Computational Mechanics, 49(1) :87-97, 2012.
- [6] U.S. Lindholm, D.D. Kana, H.N. Abramson. *Breathing vibrations of a circular cylindrical shell with an internal liquid*, J. Aerospace Sci, 29(9) :1052-1059, 1962
- [7] M.P. Mignolet, C. Soize. *Stochastic reduced order models for uncertain geometrically nonlinear dynamical systems*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier, 197(45-48) :3951-3963, 2008.
- [8] R. Ohayon, C. Soize. *Vibration of structures containing compressible liquids with surface tension and sloshing effects. Reduced-order model*, Computational Mechanics, Springer, 55(6) :1071-1078, 2015.
- [9] R. Ohayon, C. Soize. *Nonlinear model reduction for computational vibration analysis of structures with weak geometrical nonlinearity coupled with linear acoustic liquids in the presence of linear sloshing and capillarity*, Computers & Fluids, Elsevier, 141 :82-89, 2016.