Questions sur l'enseignement des nombres, notamment décimaux, au cycle 3.

Christine Chambris

QUESTIONS SUR L'ENSEIGNEMENT DES NOMBRES, NOTAMMENT DECIMAUX, AU CYCLE 3

Christine Chambris
Université de Cergy-Pontoise
Laboratoire de didactique André Revuz (LDAR EA4434), UA, UCP, UPD, UPEC, UR

Résumé.
La conférence de consensus sur les nombres et le calcul qui s'est tenue en novembre 2015 a rappelé les difficultés des élèves dans l'apprentissage des nombres notamment décimaux à la fin de l'école. Plusieurs intervenants à la conférence (Chesné et Fischer, Desmet) s'interrogent sur l'introduction des décimaux. Dans ses conclusions, la conférence recommande d'étudier les fractions en amont des décimaux mais que ce travail ne soit pas trop ambitieux, tout en soulignant la nécessité de mettre en avant que l'écriture décimale des décimaux est un prolongement de celle des entiers. Dans cet exposé, il s'agira d'investiguer plus avant ces tensions qui existent dans l'enseignement des nombres, notamment décimaux, au cycle 3. Nous chercherons aussi à identifier des marges de manœuvre.

Introduction

Le titre de cette conférence est centré sur les nombres décimaux. Pourtant, comme nous allons le voir, on ne peut penser l'enseignement des décimaux au cycle 3 sans considérer à la fois celui des entiers et celui des fractions puisque d'une part l'écriture décimale qui sera privilégiée pour les décimaux vient des entiers, et parce que le concept de nombre décimal est intimement lié au fractionnement des grandeurs.[1]

Sauf exceptions signalées, les données statistiques que j'utilise viennent soit de la conférence de consensus qui s'est déroulée en novembre 2015 et à laquelle je ferai référence à plusieurs reprises, en particulier du rapport Chesné et Fischer sur les acquis des élèves, soit directement de la thèse de Chesné (voir aussi le texte de la conférence de Chesné dans ces actes). Je vais d'ailleurs commencer par citer un extrait de la conclusion du texte de Chesné et Fischer.

> Un certain nombre d'élèves se présentent donc à l'entrée au collège comme des "experts apparents" (Roche et Clarke, 2006), pouvant réussir certaines tâches (en ajoutant par exemple des zéros dans la partie décimale pour comparer deux nombres décimaux afin d'avoir le même nombre de chiffres), mais cette réussite opérationnelle masque une conceptualisation déficiente des nombres décimaux (…), voire des nombres entiers. (…) Nous suggérons donc qu'il est urgent de répondre à un certain nombre de questions, institutionnelles (Comment et quand introduire les nombres décimaux ? (…)), et didactiques (sur les changements de registres, sur la demi-droite graduée, (…)). (Chesné & Fischer, 2015, p.41)

Plutôt que de m'attaquer à la grosse question institutionnelle : « comment et quand introduire les nombres décimaux », je vais resituer l'enseignement des décimaux dans le contexte plus large de l'enseignement des nombres au cycle 3 et tenter d'identifier des points sensibles dans cet enseignement ainsi que des leviers pour intervenir localement plutôt que d'envisager des changements plus globaux.

Pour situer l'intérêt des décimaux, je vais faire un premier détour historique (en m'autorisant un anachronisme car les notations que j'utilise ne sont pas d'origine). En

[1] Ce texte reprend beaucoup d'aspect du texte publié dans le numéro 108 de la revue Repères-IREM du réseau des IREM : Un regard sur les nombres à la transition école – collège par C. Chambris, F. Tempier, et C. Allard, pages 63 à 91 (j'y réfère par RI-108 dans ce texte). Il en adopte néanmoins une présentation souvent différente et en précise d'autres.

particulier, avec les fractions, le calcul de sommes, de nombres non entiers donc, est couteux puisqu'il faut mettre au même dénominateur les fractions : $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{5}{12}=\frac{6\times 1}{6\times 2}+\frac{4\times 2}{4\times 3}+\frac{5}{12}=\frac{6+8+5}{12}=\frac{19}{12}=1+\frac{7}{12}$.

Pour obtenir une approximation décimale de cette somme, j'ai retenu des approximations décimales au centième de chacune des fractions, puis j'ai aligné les uns en dessous des autres les chiffres qui représentent des unités du même ordre et effectué l'addition posée comme avec les entiers. Ainsi, l'invention de l'écriture positionnelle permet notamment d'étendre les techniques de calcul sur les nombres entiers aux nombres non entiers. Et cette écriture décimale à virgule incorpore à la fois des propriétés des entiers et d'autres des nombres non entiers.

$$\begin{array}{cccc} & 1 & & \\ & 0, & 5 & \\ + & 0, & 6 & 7 \\ + & 0, & 4 & 1 \\ \hline & 1, & 5 & 8 \end{array}$$

Toutefois, cette extension ne se fait pas sur tous les nombres non entiers mais seulement sur les décimaux, qui approximent d'aussi près qu'on veut toutes les mesures de grandeurs. Ainsi, dans le calcul en colonne, la mise au même dénominateur est prise en charge par l'écriture positionnelle et la relation constante entre deux positions adjacentes de cette écriture, c'est-à-dire le rapport dix entre les unités et les dizaines, les dizaines et les centaines, les unités et les dixièmes, les dixièmes et les centièmes…. Cette propriété de l'écriture décimale, des nombres qu'ils soient entiers ou décimaux, permet de prolonger à peu de frais les techniques sur les entiers, aux nombres décimaux. Pourtant, comme le suggèrent les éléments sur les connaissances des élèves dont nous disposons, cette extension ne semble pas aller de soi pour les élèves du cycle 3. Si, par exemple, presque tous savent multiplier un entier comme 23 par dix, moins de la moitié réussit à multiplier un décimal comme 35,2 par 100.

Pour étudier la complexité de ce transfert des techniques sur les entiers aux décimaux, en particulier au cycle 3, je vais d'abord évoquer l'entrée dans les décimaux au cycle 3 puis les fractions. J'en viendrai ensuite aux nombres entiers qu'on étudie au cycle 3. Je terminerai ce voyage avec la question du transfert, avant de tirer quelques conclusions.

L'entrée dans les décimaux

La conférence de consensus, dans ses recommandations, indique que :

> R12 – L'étude des fractions précède celle des nombres décimaux, mais doit se limiter aux fractions simples (demi, tiers, quart…) et aux fractions décimales (dixièmes, centièmes…) dans le cas du fractionnement de l'unité.

Et ajoute des commentaires :

> Des travaux de recherche en didactique et en psychologie des apprentissages montrent l'utilité de s'appuyer sur les fractions pour donner du sens aux nombres décimaux, mais aussi que le traitement et la compréhension des fractions sont particulièrement difficiles pour les élèves. Dès lors, cet apprentissage ne doit pas être trop ambitieux à l'école primaire. Il sera limité à une maîtrise du fractionnement de l'unité en parts égales sur les fractions simples puis sur les fractions décimales (dixième, centième, …) permettant la compréhension de la signification des chiffres dans l'écriture à virgule.

Ces interrogations relatives à la place des fractions ne sont pas nouvelles. Et en réalité deux grandes tendances se retrouvent dans les constructions mathématiques des décimaux : directement des entiers aux décimaux, ou bien, des entiers aux décimaux, en passant par les fractions. Elles se retrouvent aussi dans les travaux de didactiques relatifs à l'enseignement apprentissage des décimaux et dans les propositions des programmes depuis le début du 20e siècle (cf. RI-108, p. 80).

Les constructions des décimaux qui passent par les fractions sont suggérées dans les programmes depuis les années 1980. Les grandes lignes de la progression sont les suivantes :

- étude des fractions simples : manipulations, représentations imagées variées, équivalences du type $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$, décomposition en « entier + rompu » : $\frac{14}{3}=4+\frac{2}{3}$, addition $\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=\frac{6}{3}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.
- étude des fractions décimales comme cas particuliers de fractions : quelques représentations imagées, équivalences du type $\frac{1}{10}=\frac{10}{100}$, $\frac{10}{10}=1$, $\frac{20}{100}=\frac{2}{10}$, etc. ; décomposition en « entier + rompu » : $\frac{423}{100}=4+\frac{23}{100}$; addition : $\frac{23}{100}=\frac{20}{100}+\frac{3}{100}=\frac{2}{10}+\frac{3}{100}$, etc. ; puis somme de fractions décimales (réduites), réécrites avec l'écriture décimale $4+\frac{2}{10}+\frac{3}{100} = 4{,}23$ (introduction de l'écriture chiffrée à virgule).

Qu'en est-il de la mise en œuvre de cette progression dans les classes ? Il est extrêmement difficile de répondre à cette question. Allard (2015) a fait une étude de cas (voir aussi RI-108, p.82-84). Elle s'intéresse aux pratiques de professeurs des écoles maîtres-formateurs dans l'enseignement des fractions. Deux enseignants suivent bien la progression. Un troisième essaie de la suivre mais rencontre des difficultés. Le quatrième ne la suit pas du tout. Il utilise le système métrique et des déplacements de virgule dans le tableau de conversion pour introduire les décimaux (ce qui est susceptible de conforter l'idée que ce sont des nombres entiers). Intéressons-nous à la décomposition en « entier + rompu » qui est un point délicat comme nous allons le voir, par exemple $\frac{17}{3}$ c'est 5 et un « reste » de $\frac{2}{3}$. Les deux enseignants qui suivent la progression proposent cette tâche, mais uniquement avec des petits nombres, du fait d'un appui sur des manipulations. Ils mettent deux raisonnements en évidence :

- report de bande unité et comptage simultané : $\frac{3}{3};\frac{6}{3};\frac{9}{3};\frac{12}{3};\frac{15}{3};\frac{18}{3}$, puis comptage des reports : $\frac{17}{3}=5+\frac{2}{3}$;
- calcul en appui sur $1=\frac{3}{3}, \frac{3}{3}+\frac{3}{3}+\frac{3}{3}+\frac{3}{3}+\frac{3}{3}+\frac{2}{3}=5+\frac{2}{3}$.

Le raisonnement peut être généralisé avec la division euclidienne : « dans 17 tiers combien de fois 3 tiers ? » qui se traduit par : « en 17 combien de fois 3 ? ». Cette généralisation, sans doute assez délicate, n'est pas enseignée, par suite les raisonnements enseignés ne seront probablement pas suffisant pour comprendre ce qui se joue avec les décimaux. L'enseignant qui rencontre des difficultés propose cette tâche mais il indique uniquement une justification formelle en appui sur la division euclidienne, visiblement inaccessible aux élèves : on divise 17 par 3, le quotient 5, il reste 2 donc $\frac{17}{3}= 5+\frac{2}{3}$. De façon cohérente, le quatrième enseignant qui ne suit pas la progression institutionnelle ne propose pas cette tâche.

De même, si l'équivalence de fractions est « visible » sur des représentations avec des « fractions simples », sa généralisation est délicate, au début du cycle 3. Elle serait peut-être plus accessible, programmée de façon explicite à la fin du C3, en amont des règles algébriques du cycle 4.

Si on résume, la progression sous-jacente pour les fractions-décimaux au cycle 3 est la suivante : d'abord l'étude des fractions simples avec la découverte, quelques équivalences, les décompositions en entier + rompu, l'addition, vient ensuite la généralisation aux fractions décimales, puis l'introduction de l'écriture positionnelle et la « disparition » des fractions.

Cette progression est couteuse en termes « d'équipement » sur les fractions pour pouvoir les manipuler correctement, et sans doute difficile. De plus, sitôt les décimaux introduits les fractions disparaissent. Quel est le « retour sur investissement » pour les enseignants qui « investissent » dans les fractions ?

Par ailleurs, si on regarde la présentation de cette progression dans les textes officiels récents, on observe la chose suivante. Elle était assez explicite dans les programmes de 2002. Dans ceux de 2008, la décomposition en entier + rompu apparaissait au CM2 seulement, alors que les décimaux étaient programmés au CM ; et aucun élément explicite n'était présent dans les programmes du collège en 2008. En particulier les fractions venaient après les décimaux. Il semble donc que la progression est peu lisible dans les textes institutionnels.

Ces éléments permettent d'identifier un certain nombre de points sensibles relativement à la mise en œuvre de cette progression : la connaissance et la compréhension de sa logique, la difficulté pour en enseigner certains points comme l'équivalence des fractions, la décomposition en entier + rompu pour des « fractions simples » relativement complexes. De plus, en France contrairement aux pays anglo-saxon où le système de mesure sollicite les fractions, les « débouchés »[2] des fractions sont, relativement à l'étude des nombres, modestes. Ceci amène à la question : quel est l'enseignement effectivement dispensé pour l'entrée dans les décimaux ? Il n'est pas possible de répondre à cette question sans une enquête plus approfondie. Toutefois, il est possible que la situation soit relativement hétérogène (voir les quatre cas présentés ci-avant).

Les fractions

Diversité des significations et connaissances des élèves

Venons-en aux connaissances des élèves sur les fractions. Plusieurs enquêtes, avec des modalités de passation différentes, ont demandé aux élèves d'associer la fraction $\frac{1}{4}$ et son écriture décimale 0,25 : par exemple trouver deux nombres égaux parmi quatre donnés dont $\frac{1}{4}$, 0,25 et 1,4 ; écrire $\frac{1}{4}$ avec une virgule. Elles donnent le même taux de réussite, environ 27% des élèves en fin de CM2 ou en début de 6^{e} parviennent à indiquer que $\frac{1}{4}$=0,25. Ce taux de réussite peut être troublant tant il semble clair qu'un quart c'est « zéro vingt cinq ». Alors qu'est-ce qui est difficile ? Tout d'abord, pour réussir à ces tâches il faut mettre deux systèmes de signes en relation : l'écriture avec barre de fraction et l'écriture à virgule décimale. L'apprentissage de chacun de ces systèmes démarre au CM1, c'est donc un apprentissage relativement récent en début de 6^{e}. Identifier les connaissances qui sont nécessaires pour traiter cette tâche peut permettre de comprendre plus précisément le faible taux de réussite.

Plusieurs techniques, mobilisant des connaissances différentes, sont possibles. L'élève peut s'appuyer sur des connaissances mémorisées qui impliquent le langage courant : en particulier « et demi », c'est 0,5, « quart » c'est 0,25 et aussi 0,75. Pour ce faire, il faut déjà savoir lire la fraction 1 sur 4 comme « un quart ». Une autre façon de faire peut être d'interpréter $\frac{1}{4}$ comme 1 divisé par 4 et d'effectuer le calcul. Si 0,25 est une réponse proposée, l'élève peut transformer 0,25 en $\frac{25}{100}$ et comparer les fractions $\frac{25}{100}$ et $\frac{1}{4}$. Pour ce faire, si l'élève sait que multiplier ou diviser par un même nombre numérateur et dénominateur permet d'obtenir des fractions équivalentes, il peut utiliser le facteur commun 25, à condition quand même de

[2] Comme les bioénergies constituent de nouveaux débouchés pour l'agriculture.

savoir que 100 = 4 x 25. Toutefois, à l'école, l'équivalence de fractions n'est en principe travaillée que sur des petits nombres comme 3 quarts équivalent à 6 huitièmes et n'est en principe pas établie dans le cas général. Elle s'obtient par un découpage ou en appui sur des représentations ; 25 et 100 ne sont cependant pas des petits nombres et imaginer un découpage *ad hoc* semble difficile. A partir d'une fraction opérateur, l'élève peut raisonner sur un cas particulier, par exemple en prenant le nombre 100, ou dans le cas général et conclure. Ces raisonnements supposent notamment d'interpréter la multiplication par 0,25 comme un opérateur « prendre $\frac{25}{100}$ de ». (voir RI-108, p. 65-67 pour plus de détails).

Malgré la multiplicité des techniques qui conduisent à $\frac{1}{4} = 0{,}25$, cette égalité banale cache peut-être une certaine complexité en fin d'école. En effet, le théorème général pour l'égalité des fractions n'est pas au programme de l'école, la multiplication par un décimal non plus. L'équivalence des fractions à partir de la mesure des grandeurs, qui relève en partie de l'école, est rendue complexe car les nombres sont plutôt grands. Pour réussir, il reste aux élèves qui n'ont pas mémorisé la connaissance $\frac{1}{4} = 0{,}25$, l'interprétation de $\frac{1}{4}$ en 1 : 4.

Les fractions dans la transition : le cas du partage au quotient

Les traités classiques prenaient en charge le lien entre le *n*-ième de a et $\frac{a}{n}$ sur des exemples génériques. Par exemple, dans le traité de Reynaud (1821), il s'agit de prouver que 4 divisé par sept (ou le septième de quatre) c'est quatre septièmes :

> il reste donc à diviser 4 par 7. Pour évaluer ce (…) quotient, on conçoit l'unité divisée en 7 parties égales ; chacune de ces parties exprime le quotient de 1 par 7, puisque l'une d'elles prise 7 fois, donne le dividende 1. Mais, 4 égal à 1 plus 1 plus 1 plus 1 ; on obtiendra donc le quotient de 4 par 7, en prenant 4 fois le septième de 1 ; de sorte que le septième de 4 est la même chose que 4 fois le septième d'un. (§14)

Avec le symbolisme arithmétique, ce peut être traduit par : $4{:}7 = (1+1+1+1){:}7 = (1{:}7) + (1{:}7) + (1{:}7) + (1{:}7)$ or $1{:}7 = \frac{1}{7}$ donc $4{:}7 = \frac{1}{7} \times 4$ *et* $4 \times \frac{1}{7} = 4{:}7 = \frac{1}{7} \times 4 = \frac{4}{7}$.[3] Pour ce faire, le lien entre $1{:}7$ et $\frac{1}{7}$ est clairement pris en charge.

Que nous disent les programmes sur ce point ? Depuis 1996, ce qui est visible à la lecture des programmes relativement à la place des fractions dans la transition école-collège, ce sont les différentes interprétations de la fraction : du partage (pour l'école) au quotient (pour la classe de 6^{e}). Qu'est-ce que la fraction partage ? C'est considérer que $\frac{a}{b}$ c'est *a b*ièmes, c'est-à-dire *a* fois 1 *b* ième. Qu'est-ce que la fraction quotient ? C'est la solution de l'équation $a \times x = b$. La fraction est le quotient de l'entier *a* par l'entier *b*, le nombre qui multiplié par *b* donne *a*.

Comment la liaison doit-elle être opérationnalisée ? Un texte de l'inspection générale indique comment passer d'une conception à l'autre (voir aussi Chesné, 2007), sur un cas particulier. Plus précisément, le texte explique pourquoi 7 quart est solution de l'équation $4x = 7$. « 4 fois 7 quarts, c'est 28 quarts, c'est 7 fois quatre quarts, donc 7 fois 1, donc 7 » (IGEN, 2004, p. 3). L'explication masque la propriété d'associativité de la multiplication qui permettrait de généraliser la preuve. Qu'en est-il de cette répartition *du partage au quotient* dans les pratiques des enseignants ? Dans RI-108 (p.69-70), les quelques cahiers de 6^{e} étudiés

[3] Nous utilisons ici la convention antérieure à 1970 où le multiplicande est à gauche et le multiplicateur à droite. Cette convention n'est plus en usage. La convention (implicite) aujourd'hui semble être que l'ordre des facteurs dans une multiplication est indifférent (ce qui ne permet pas de distinguer – si besoin était- définition de la multiplication et propriété de commutativité).

montrent que la fraction est présentée d'emblée comme un « calcul » : $\frac{a}{b}$ est le quotient de a par b. Cette approche est d'ailleurs apparemment considérée comme un « rappel » de ce qui se fait à l'école. Quel travail est effectivement proposé aux élèves à l'école sur les fractions, comme mesures de grandeurs ? Ce travail est-il enrichi au collège, le cas échéant comment ? Cette question restera ouverte. Néanmoins, des indices interrogent sur la lisibilité des objectifs pour les enseignants. L'étude des fractions, comme mesures de grandeurs, à l'école pourrait présenter des variations très importantes selon les classes. Les fractions pourraient parfois y être déjà considérées comme « une division ». Au collège, l'enrichissement des connaissances sur les fractions, comme mesures de grandeurs, pourrait être très modeste. Et l'injonction « du partage au quotient » pourrait être interprétée comme un découpage plutôt qu'une invitation à faire un lien entre deux points de vue.

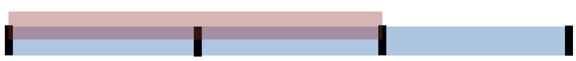
Les fractions dans la transition : le cas de la fraction comme opérateur

Une autre interprétation des fractions que élèves du cycle 3 rencontrent est celle de la fraction « opérateur » : la moitié de, le quart de, les 2 tiers d'un nombre… Au fil des programmes, cette interprétation des fractions a fortement varié. A l'école, en 1945, les fractions sont des opérateurs sur les grandeurs : « Prendre les quatre cinquièmes d'une grandeur, c'est partager cette grandeur en cinq parties égales et prendre quatre de ces parties (…). Il suffit pour cela de diviser la mesure de la grandeur par 5 et de multiplier le quotient obtenu par 4. ». Ce point de vue est aménagé en 1970-1980, avec la restriction aux opérateurs sur des nombres (dans le domaine numérique) : l'enchaînement d'une division et d'une multiplication (qui commutent, à l'ensemble de définition près), et sur des grandeurs (domaine mesure en 1970). En 2002, il reste les fractions de nombres entiers, de même en 2008 mais le facteur multiplicatif n'est plus explicite, restent quart et tiers au début du cycle 3. Ces expressions apparaissent dans l'étude des nombres *entiers naturels* (et non en relation avec les problèmes arithmétiques ou les fonctions). L'enrichissement au long du cycle n'est pas explicitement prescrit, même si rien n'empêche de proposer des tâches comme « combien font les deux tiers de 600 g ? ». Les manuels du CM (Thomas 2013) en 2012 présentent une grande diversité relativement à la présence de tels problèmes : aucun, un peu, beaucoup.

Qu'en est-il en 6^{e} ? Dans les programmes, en 2008, il s'agit de « prendre une fraction d'une quantité, modélisation par multiplication ». Dans des cahiers de 6^{e} (RI-108, p. 71), le savoir en jeu pour $\frac{3}{4} \times 12$ semble être l'équivalence de trois modes de calcul : (3 x 12) : 4, (3 : 4) x 12, (12 : 4) x 3 qui est le seul point qui apparaît. Les connaissances des élèves des élèves à l'entrée en 6^{e} sont très fragiles puisque « Le nombre égal aux deux tiers de 12 est : » est réussi à 11%, et le QCM « deux tiers de 12 kg font : 4 kg, 8 kg, 24 kg, 72 kg est réussi à 33%. « Le tiers de 60 km » et les *quarts* semblent un peu mieux maîtrisés (Chesné 2014).

Dans le programme du cycle 3 (2016), il s'agit de « relier les formulations la moitié, le tiers, le quart et 1/2 de, 1/3 de, 1/4 de, etc. », le cadre est celui de l'étude des fractions, ce qui pourrait contribuer à enrichir le travail proposé aux élèves, notamment les liens entre fractions de nombre, fractions mesures de grandeurs, fractions de grandeur même aucun facteur multiplicatif n'est indiqué.

Par exemple, pour calculer 2 tiers de 12 cm, deux techniques pourraient être proposées à l'école et confrontées à un moment :



- fabriquer « 2 tiers de 12 cm », par pliage, à partir d'une bande papier de 12 cm : plier en trois pour avoir le tiers de 12 cm, puis dupliquer la longueur obtenue, la mesurer,
- par calcul, le tiers de 12 cm, 12 cm : 4 = 3 cm, puis 3 cm x 3 = 9 cm.

Des pistes pour faire évoluer le travail sur les fractions

A partir de ce qui précède nous proposons quelques pistes susceptibles de faire évoluer la situation.

Les quantièmes et le lien avec la division

Le premier axe pourrait être le renforcement de la caractérisation des quantièmes (fractions unitaires) et leur lien avec la division. Ainsi, $\frac{1}{n}$ c'est la taille de l'unité partagée en n parts égales mais $\frac{1}{n}$ c'est aussi c'est ce qu'il faut mettre n fois pour faire l'unité. Si la première caractérisation semble travaillée, la deuxième l'est peut-être moins. De ces deux caractérisations découlent : $\frac{1}{n} \times n = 1$; $\frac{n}{n} = 1$; $1 : n = \frac{1}{n}$.

La place des fractions dans le cycle 3

Il est possible que le travail sur les fractions soit de faible ampleur à l'école et en 6^{e}. Les éléments qui précèdent sont un levier pour le renforcer.

Serait-il opportun, et à quel moment serait-ce le plus opportun, de renforcer le travail sur les équivalences à partir des mesures de grandeurs ? Au début du cycle 3 ou à la fin du cycle, juste avant d'aborder les théorèmes algébriques du cycle 4, avec l'hypothèse que les élèves seraient mieux armés cognitivement ?

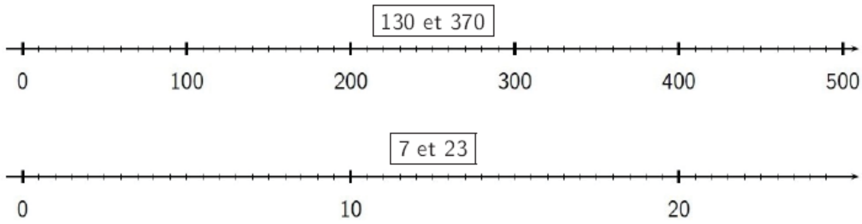
Le point de vue opérateur occupe peu de place à l'école, le renforcer pourrait permettre d'accroitre les « débouchés » des fractions. Les programmes parlent des *fractions simples*. Limiter cette liste aux demi, tiers et quart ne permet pas, par exemple, d'apprendre la généralité des désignations en « i-èmes » (pourtant utilisées avec les dixièmes et les centièmes). Des problèmes du champ multiplicatif pourraient être liés plus fréquemment avec les fractions simples en « i-èmes ».

La numération des entiers

Les entiers pour mieux comprendre les décimaux ?

Chesné et Ficher parlaient d'élèves experts apparents dont la réussite pouvait masquer une conceptualisation défaillante des entiers. Les règles installées sur les entiers masquent-elles une conceptualisation défaillante de la numération positionnelle (des entiers) ? Pour étayer indirectement cette hypothèse, on peut aussi citer le travail récent de Desmet (2012) qui montre que certaines connaissances sur l'écriture décimale des entiers sont meilleures prédictrices de la réussite ultérieure sur les décimaux que d'autres sur les fractions. Dans l'étude évoquée, toutes les tâches sur les fractions impliquent l'écriture fractionnaire. Pour l'écriture décimale, les tâches proposées –dont certaines sont citées ci-après- jouent, pour la plupart, sur un changement de registre d'expression des nombres et / ou les relations entre les chiffres de l'écriture chiffrée (ou entre les unités de numération) :

- écrire en chiffres Trois cent cinq, Mille deux, Trois mille seize, Seize cent cinquante quatre,
- écrire en mots : 56, 115, 105, 300, 420, 670,
- Le plus grand nombre de trois chiffres différents, c'est… Dix en moins que cinq centaines, cela fait…, Deux dizaines en plus d'une centaine, cela fait…



Parce que la compréhension de l'écriture décimale des entiers apparaît comme un point crucial pour la compréhension des décimaux, nous allons poursuivre cette enquête du côté des entiers, en particulier d'un autre type de nombres que l'on découvre lui aussi au cycle 3. Il s'agit des grands nombres.

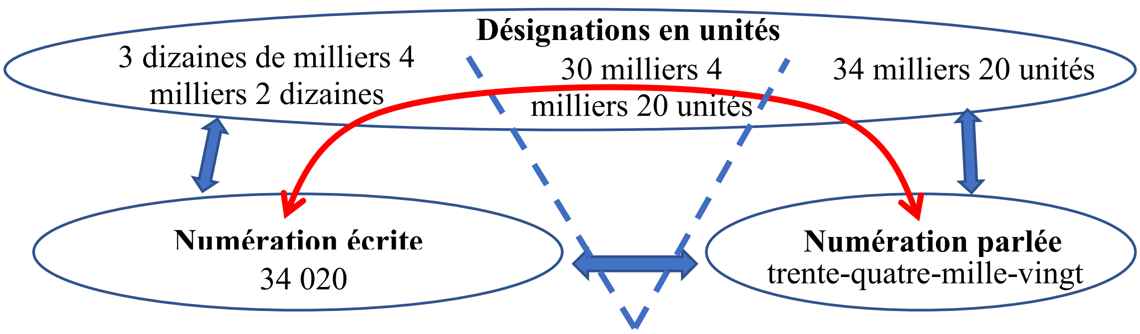
Les connaissances des élèves et des enseignants : des petits aux grands nombres

Écrire un nombre entier à trois ou quatre chiffres est maîtrisé par 95% des élèves en fin d'école alors qu'écrire un nombre entier supérieur à 10 000 ne l'est que par les trois quarts d'entre eux. Il y a relativement peu de recherches sur l'apprentissage des grands nombres, en comparaison de ce qui existe sur les nombres plus petits. Il semble d'abord que les tâches d'écriture des grands nombres fassent ressurgir les difficultés des élèves sur les nombres plus petits puisqu'il faut une très bonne maîtrise des nombres de moins de trois chiffres pour écrire « ceux qui composent » un grand nombre, ce qui surprend parfois les enseignants qui pensaient ces nombres maîtrisés, comme on peut le lire dans (Mercier, 1997). Par exemple, pour « deux millions trois cent quarante mille cent cinq », sur 28 élèves, 19 donnent la bonne réponse mais six écrivent 2 340 500 et un écrit 2 340 050. En effet, le nombre de centaines de *cent cinq* ne s'entend pas et il semble que des élèves en écrivent 5.

Une autre difficulté bien connue de l'apprentissage des grands nombres est celle des « zéros muets ». Les élèves ont des difficultés à articuler le système écrit et le système parlé. Les travaux qui existent sur ce thème (dans la communauté francophone) soulignent que les enseignants sont plutôt démunis lorsque les élèves ne réussissent pas à lire les nombres et attribuent largement ces difficultés d'enseignement au manque d'identification des savoirs mathématiques liés aux grands nombres. Les moyens souvent utilisés, comme le point (mettre un point quand on entend mille, million) et les tranches de trois chiffres (complétées si besoin par des zéros) ne permettent pas toujours de lever les difficultés. C'est le cas par exemple, pour la tâche « écrire en chiffres dix-sept millions deux mille cinquante-huit » qui amène les élèves à proposer : 17 2000 58 / 17 2 58 / 017 200 058 dans Mercier (1997). Cet auteur identifie un « manque à savoir institutionnel ». (voir RI-108, p. 77-79 pour plus de détails)

Des éléments de savoirs sur les grands nombres

J'indique maintenant des éléments pour un savoir à enseigner sur ces grands nombres.



Les unités de numération (unités, dizaines, centaines…) constituent un système de signe qui permet de formuler les savoirs en jeu sur les grands nombres mais aussi d'expliquer, de justifier, de contrôler. Ainsi les noms des nombres peuvent-ils être interprétés dans un premier système à base mille : les unités simples, milliers, millions, milliards… et trente quatre mille vingt peut être interprété comme 34 milliers et 20 unités. Ces 34 milliers peuvent être transformés en 30 milliers et 4 milliers, puis (ou directement) en 3 dizaines de milliers et 4 milliers. Apparaît alors un deuxième système d'unités à base dix, les unités simples, dizaines, centaines, milliers, dizaines de milliers, centaines de milliers, millions, dizaines de millions… Ce deuxième système d'unités permet d'interpréter les chiffres de la numération positionnelle décimale. Les unités en 1^{e} position, les dizaines en 2^{e}, les centaines en 3^{e}, les milliers en 4^{e}, les dizaines de milliers en 5^{e}…

Programmes et pratiques des enseignants

On le voit, ces éléments de savoir ont une portée plus grande que les seules lecture et écriture des grands nombres qui apparaissent parfois comme tout ce qu'il y aurait à savoir sur les grands nombres. Ce sont en effet les seules tâches des programmes de l'école en 2008, ou encore les seules présentes dans les évaluations nationales.

Les programmes de 2016 font référence aux décompositions en base mille. Tempier (2016) a interrogé des élèves de fin de 6^{e} sur les relations entre unités. Il observe par exemple qu'à peine la moitié d'entre eux réussit aux tâches : 4 millions = ………… centaines de milliers et 3 millions = ………… milliers. Il est intéressant de noter que la relation entre centaines de milliers et millions n'est pas mieux maîtrisée que celle entre milliers et millions. La maîtrise de ces relations entre unités successives (soit pour la numération chiffrée, soit pour la numération parlée) me semble essentielle pour la compréhension des nombres et de leurs ordres de grandeur, notamment. La maîtrise de la numération écrite est par ailleurs engagée dans la compréhension des décimaux.

Quelques tâches et savoirs sur les nombres entiers au cycle 3

Le début du cycle 3 pourrait ainsi être l'occasion de consolider la compréhension du nombre mille, comme 10 centaines, 100 dizaines, des relations comme 3 milliers = 30 centaines et aussi 32 c= 3 m 2c pour aller vers les relations (à travailler à l'oral) 30 centaines de milliers = 3 millions puis 32 centaines de milliers = 3 millions (milliers de milliers) 2 centaines de milliers, mais aussi 3 000 millions = 3 milliards. Ce pourrait être l'occasion d'institutionnaliser une règle générale, pour l'écriture chiffrée, qui sera valable aussi pour les décimaux : dans l'écriture d'un nombre en chiffre, tout chiffre indique des unités dix fois plus grandes que celui qui est à sa droite (et éventuellement tout chiffre indique des unités dix fois plus petites que celui qui est à gauche).

Un autre aspect important à travailler est le lien entre numération et division euclidienne, en particulier résoudre des problèmes du champ multiplicatif, en appui sur la numération, peut permettre de consolider le sens des opérations. La numération permet en effet de résoudre à peu de frais certains d'entre eux car :

- 35621 = 356 centaines 21 unités
- 35621 : 100 = 356 (reste 21)
- 35621 = (356 x 100) + 21

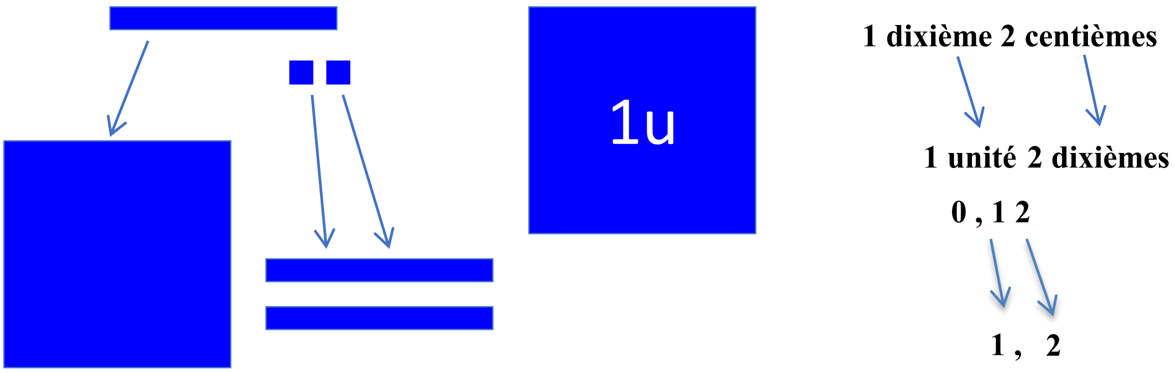
L’extension des techniques des entiers aux décimaux

Dans cette partie nous en venons à l’extension de certaines propriétés de l’écriture décimale des entiers aux décimaux, pour tenter de mieux comprendre l’écart de réussite entre les tâches sur les entiers et les tâches sur les décimaux.

La multiplication par les puissances de dix

La technique dominante pour multiplier les entiers par 100 semble être : écrire deux zéros à droite, par exemple : 24 x 100 = 2400. La technique de multiplication par 100 pour les nombres décimaux semble être : déplacer la virgule de deux rangs vers la droite. Par exemple, 2,345 x 100 = 234,5. Pourtant, pour 2,34 x 100 = 234, la virgule disparaît et pour 4,7 x 100 = 470, la virgule disparaît et un zéro apparaît ! Cette complexité pour appliquer la règle explique sans doute au moins en partie les difficultés des élèves.

Ces deux techniques peuvent être justifiées avec une explication identique : dans la multiplication par 100, chaque chiffre prend une valeur 100 fois supérieure (les unités sont transformées en centaines, les dixièmes en dizaines, les centièmes en unités, les dizaines en milliers, etc.). En effet, par exemple pour 0,12 x 10, la justification peut s’appuyer sur : 0,12=1 dixième 2 centièmes (définition de l’écriture décimale). 10 x 1 dixième = 1 unité (car l’unité est dix fois plus grosse que le dixième de l’unité). 10 x 2 centièmes = 2 dixièmes (car le dixième est dix fois plus gros que le centième). D’où 0,12 x 10 = 1 unité 2 dixièmes = 1,2 (définition de l’écriture décimale). En appui sur la grandeur aire, on peut avoir[4] :



Il n’est pas sûr que tous les enseignants mobilisent ce type d’explication. Par ailleurs, y aurait-il un intérêt à enseigner une technique commune aux entiers et aux décimaux comme : *dans une multiplication par 100, chaque chiffre est déplacé de deux rangs vers la gauche* ou encore : *les unités sont transformées en centaines* ? La situation est peut-être assez similaire pour la comparaison.

La comparaison des nombres

Considérons en effet les deux paires de nombres à comparer : 32,4 et 2,56 d’une part, 45,635 et 45,67 d’autre part. Une technique (1) répandue semble être la suivante :

- Etape 1 : Comparer d’abord les parties entières : plus le nombre est long plus il est grand (32 est plus long que 2) et si les deux nombres ont la même longueur, on compare chiffre à chiffre en partant de la gauche jusqu’à trouver deux chiffres différents.
- Si les deux parties entières sont égales (45) : étape 2, pour la partie décimale. Comparer chiffre à chiffre, à partir de la gauche, les chiffres des dixièmes, puis ceux des centièmes, etc. jusqu’à trouver deux chiffres qui diffèrent.

---

[4] Idée de présentation empruntée à Charnay (2014).

La première étape (utilisée fréquemment pour les entiers) s'appuie sur la longueur du nombre, la deuxième est spécifique de la partie fractionnaire. Cette technique ne renforce-t-elle pas l'idée qu'un décimal est la juxtaposition de deux entiers ? Des techniques différentes pour les parties entière et décimale sont-elles obligées ?

Il semble qu'une alternative soit *théoriquement* possible en au moins une des techniques suivantes.

- 2) Repérer l'ordre de l'unité le plus grand dans chaque nombre, comparer ces ordres d'unité :
  - des dizaines pour 32,4 et des unités pour 2,56, ils sont différents : celui qui est le plus grand indique le plus grand nombre
  - des dizaines pour 45,635 et 45,67 : ils sont identiques. Comparer les chiffres, de gauche à droite, jusqu'à ce que deux chiffres différents se présentent (les dizaines, puis les unités, puis les dixièmes, puis les centièmes).
- 3) Ecrire des zéros à droite pour que chacun des nombres à comparer exprime un nombre entier d'unités du même ordre : 32,4=3240 centièmes et 2,56=256 centièmes ou encore 32400 millièmes et 2560 millièmes, etc.

La technique 2 se généralise aux écritures décimales illimitées des réels (pas la technique 3, à moins d'effectuer des troncatures). La technique 3 « rabat » les décimaux sur les entiers. Elle consiste donc à convertir les deux nombres dans une même unité de façon à avoir deux nombres entiers d'unités du même ordre. La technique de comparaison des entiers sur la « longueur du nombre » s'applique. Ces deux techniques sont des valables à la fois pour les entiers et les décimaux.

Le renforcement de l'écriture décimale

Une idée fondamentale pour renforcer la compréhension de l'écriture décimale est de souligner ce qui est commun aux entiers et aux décimaux (CREM, 2011a, 2011b), plus précisément aux écritures décimales avec et sans virgule, par exemple :

- les différentes positions indiquent des unités dont l'ordre de grandeur est différent : de dix en dix fois plus grand quand on va vers la gauche, de dix en dix fois plus petit quand on va vers la droite,
- un signe marque l'unité : le chiffre de droite pour l'écriture sans virgule, le chiffre à gauche de la virgule pour l'écriture avec virgule,
- le zéro est un gardien de place inoccupée,
- etc.

Une idée complémentaire est de souligner ce qui n'est pas commun mais que les élèves utilisent dans les deux cas, par exemple un zéro terminal à droite multiplie le nombre par dix.

Entre écriture décimale et fractions : les noms des nombres

Les constructions mathématiques des décimaux à partir de la mesure des grandeurs, qu'elles passent ou non par les fractions, ont pour point commun d'une part de fractionner des unités en dix de façon itérative, d'autre part de s'appuyer sur l'écriture décimale positionnelle.

Un autre axe pour renforcer le lien entre les écritures fractionnaires et les écritures décimales est la lecture de ces nombres. Une technique pour lire un nombre écriture décimale, par exemple 5,14, est la suivante. Il suffit de lire la partie entière et de lui juxtaposer le « nombre entier » qui constitue la partie décimale en terminant par le nom du rang du chiffre le plus à droite (ici, des centièmes), donc 5,14 peut se dire 5 et 14 centièmes. La technique chiffre par chiffre donne une autre désignation fractionnaire : 5 unités 1 dixième 4 centièmes.

Dire *quatorze sur cent* pour $\frac{14}{100}$ et *cinq virgule quatorze* pour 5,14, utiliser ces désignations pour parler des nombres, c'est un peu comme épeler les mots pour parler : le sens des nombres n'est pas véhiculé dans l'oral. A elle seule, une désignation bien choisie permet donc de lier fractions et écriture décimale : 5 et 14 centièmes pour 5,14 et $5+\frac{14}{100}$. Par ailleurs, la mise en relation des deux désignations 5 et 14 centièmes d'une part, 5 et 1 dixième et 4 centièmes d'autre part fournit une conversion, réalisée à moindre coût, de la partie décimale : 14 centièmes = 1 dixième 4 centièmes. En écriture fractionnaire la double lecture se traduit par : $5+\frac{14}{100} = 5+\frac{1}{10}+\frac{4}{100}$. L'ajout de zéros « inutiles » est également un moyen de convertir : 0,2=0,20, 2 dixièmes = 20 centièmes. Bien sûr c'est parce que l'écriture décimale est ce qu'elle est que les conversions se réalisent automatiquement, néanmoins utiliser ces désignations pour les nombres en écriture à virgule est susceptible de favoriser le lien entre nombre décimal et fractions.

Pour conclure

Pour conclure, je souhaite revenir sur quelques leviers directs ou indirects qui pourraient être utiles pour renforcer les connaissances des élèves sur les décimaux. Le premier consiste à approfondir la compréhension de l'écriture décimale des entiers, en renforçant la connaissance des relations entre les unités, en généralisant ses règles de fonctionnement, en la liant à la division euclidienne ou à la multiplication par les puissances de dix. Le second levier consiste à tenter de donner davantage de place aux fractions. Une première piste est l'utilisation plus fréquente des désignations en « –ième », à la fois pour les écritures fractionnaires et décimales (ceci suppose de considérer d'autres dénominateurs que 2, 3 et 4 pour les fractions simples), une deuxième est d'introduire le quotient 1 : *n* et l'égalité $1\!:n=\frac{1}{n}$ dès le CM1 ainsi que les deux caractérisations de $\frac{1}{n}$; la troisième consiste à proposer des problèmes avec des fractions opérateurs dès le CE2 (avec des fractions unitaires, écrites en mots, en lien avec la division), puis avec des fractions plus variées au CM1. Une quatrième piste pourrait consister à consolider –et généraliser- certaines connaissances sur les fractions simples, à partir de la mesure des grandeurs, comme les équivalences de fractions, les décompositions en « entier+rompu ». La fin du cycle 3, avant le travail algébrique, pourrait être opportune. Un troisième levier pourrait être d'étendre, plus explicitement, l'écriture positionnelle des entiers aux décimaux, par exemple en soulignant ce qu'elle a de commun pour les entiers et les décimaux, à harmoniser les techniques et / ou leurs justifications pour les entiers et les décimaux.

La conférence de consensus suggérait à l'institution de réfléchir à la question « Comment et quand introduire les nombres décimaux ». C'est un problème complexe qui engage de nombreux équilibres. Il nous semble que nous avons envisagé dans ce texte des évolutions plus modestes susceptibles néanmoins de faire évoluer la situation, sous la condition de formations pour les enseignants.

Références

Allard C. (2015) *Etude du processus d'Institutionnalisation dans les pratiques de fin d'école primaire : le cas de l'enseignement des fractions.* Thèse de l'Université de Paris 7.

Bezout E., Reynaud A.A.L. (1784/1821) *Traité d'arithmétique à l'usage de la marine et de l'artillerie*, 9e édition. Notes sur l'arithmétique de Bezout, par A.A.L Reynaud (1821)

Bolon, J. (1993) L'enseignement des décimaux à l'école élémentaire. *Grand N, 52,* 49-79.

Brousseau G., Brousseau N. (1987). *Rationnels et Décimaux dans la scolarité obligatoire*. Université de Bordeaux 1.

Chambris, C. (2007) Petite histoire des rapports entre grandeurs et numérique dans les programmes de l'école primaire. *Repères-IREM, 69*, 5–31.

Charnay R. (2014) *La culture mathématique, c'est dès l'école primaire ! Réflexions sur les programmes scolaires.* Conférence aux journées nationales de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, 18-21 octobre 2014, Toulouse.

Chesné J.-F. (2007) Du partage au quotient, Disponible en ligne : http://maths.ac-creteil.fr/spip.php?article39 (consulté le 14/02/2017).

Chesné J.-F. (2014) *D'une évaluation à l'autre : des acquis des élèves sur les nombres en sixième à l'élaboration et à l'analyse d'une formation d'enseignants centrée sur le calcul mental.* Thèse de l'Université Paris-Diderot.

Chesné J.-F., Fischer J.-P. (2015) Les acquis des élèves dans le domaine des nombres et du calcul à l'école primaire. Rapport pour la conférence de consensus Nombres et opérations : premiers apprentissages à l'école primaire. CNESCO. Disponible en ligne : http://www.cnesco.fr/fr/numeration-acquis-des-eleves/ (consulté le 14/02/2017).

CREM (2011a) *L'apprentissage et l'enseignement des nombres décimaux, Rapport final.* Michaux C. (Dir.), Rouche N. (Dir.), Grégoire J. (Dir.), Desmet L., Skilbecq P., Fanuel J., Soille S. Nivelles, Belgique : CREM

CREM (2011b) *Enseigner et apprendre les nombres décimaux. Activités de remédiation en 5e et 6e primaire. Fascicule à destination des enseignants.* Nivelles, Belgique : CREM

Desmet L. (2012) *L'apprentissage des nombres décimaux, des nombres rationnels représentés par le système décimal de position*. Thèse de l'université catholique de louvain. belgique.

Douady R., Perrin-Glorian M.-J. (1986) *Nombres décimaux*. Brochure n° 62 Paris : IREM Paris 7.

IGEN (2004/2006) « Les nombres au collège ». Ressources pour les classes de 6e, 5e, 4e, et 3e du collège. Disponible en ligne : http://media.eduscol.education.fr/file/Programmes/17/2/doc_acc_clg_nombres_109172.pdf (consulté le 14/02/2017).

Lebesgue H. (1932) Sur la mesure des grandeurs. (Partie 1) *L'enseignement mathématique. 31*, 173-206.

Mercier A. (1997) La relation didactique et ses effets. In C. Blanchard-Laville (Ed.), *Variations sur une leçon de mathématiques. Analyses d'une séquence : « L'écriture des grands nombres »* (pp. 259-312), Paris : L'Harmattan.

Roditi E. (2007) La comparaison des nombres décimaux, conception et expérimentation d'une aide aux élèves en difficulté. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *12*, 55-81

Stevin S. (1585) *La disme*.

Tempier F. (2016) Composer et décomposer : un révélateur de la compréhension de la numération chez les élèves, *Grand N*, *98*, 67-90.

Thomas C. (2014) *A la recherche des fractions de grandeurs au cours moyen*. Mémoire de master. Université Paris-Diderot.