



HAL
open science

Modélisation non paramétrique des incertitudes satisfaisant le principe de causalité pour les structures viscoélastiques en dynamique numérique

Rémi Capillon, Christophe Desceliers, Christian Soize

► **To cite this version:**

Rémi Capillon, Christophe Desceliers, Christian Soize. Modélisation non paramétrique des incertitudes satisfaisant le principe de causalité pour les structures viscoélastiques en dynamique numérique. CSMA 2015, 12ème Colloque National en Calcul des Structures, May 2015, Giens (Var), France. pp.1-4. hal-01158256

HAL Id: hal-01158256

<https://hal.science/hal-01158256>

Submitted on 30 May 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Modélisation non paramétrique des incertitudes satisfaisant le principe de causalité pour les structures viscoélastiques en dynamique numérique

R. Capillon¹, C. Desceliers¹, C. Soize¹

¹ Université Paris-Est, Laboratoire Modélisation et Simulation Multi Echelle, MSME UMR 8208 CNRS, 5 bd Descartes, 77454 Marne-la-Vallée, France
{remi.capillon,christophe.desceliers,christian.soize}@univ-paris-est.fr

Résumé — On propose une modélisation des incertitudes pour les structures viscoélastiques tridimensionnelles, basée sur l'approche probabiliste non paramétrique qui consiste à remplacer les matrices du système nominal réduit par des matrices aléatoires. La causalité du système implique l'existence de relations faisant intervenir la transformée de Hilbert de la partie dépendante de la fréquence des matrices de raideur et d'amortissement. Ces relations doivent être prises en compte dans la modélisation des matrices aléatoires. Les résultats numériques obtenus pour une structure composite simple sont présentés.

Mots clés — Quantification des incertitudes, Non paramétrique, Viscoélasticité, Dynamique linéaire.

1 Introduction

La prise en compte des différentes sources d'incertitudes dans les modèles de simulation numérique d'une structure mécanique est nécessaire pour améliorer la robustesse des prévisions et prendre en compte la variabilité liée au processus de fabrication. Ces incertitudes peuvent être de nature paramétrique, comme par exemple les propriétés mécaniques des matériaux, ou encore de nature non paramétrique, comme par exemple les erreurs de modélisation. C'est dans le but de pouvoir prendre en compte ce dernier type d'incertitude qu'a été développée l'approche probabiliste non paramétrique pour la modélisation des incertitudes en mécanique [5]. Rappelons que l'approche consiste à remplacer les matrices du modèle réduit nominal par des matrices aléatoires dont les lois de probabilité ont été construites en utilisant la théorie de l'information. Cependant, aucun résultat n'a encore été fourni concernant les structures comportant des matériaux viscoélastiques linéaires. Le contexte théorique correspondant à ce cas de figure a néanmoins été présenté récemment dans [6, 2]. L'objectif de ce travail est donc d'une part de mettre en place une analyse numérique dédiée pour l'implémentation de la modélisation non paramétrique des incertitudes en dynamique des structures en présence de matériaux viscoélastiques, et d'autre part de quantifier le rôle joué par la viscoélasticité sur la propagation des incertitudes.

Dans le contexte de la viscoélasticité linéaire [7], la causalité du système implique l'existence de relations [3] faisant intervenir la transformée de Hilbert des parties réelle et imaginaire de la transformée de Fourier du tenseur de relaxation d'ordre 4, notée $\hat{g}_{jkh\ell}(\mathbf{x}, \omega) = \hat{g}_{jkh\ell}^R(\mathbf{x}, \omega) + i\hat{g}_{jkh\ell}^I(\mathbf{x}, \omega)$, avec i le nombre complexe imaginaire pur, \mathbf{x} la position et ω la pulsation :

$$\hat{g}_{jkh\ell}^R(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{\pi} p.v. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{g}_{jkh\ell}^I(\mathbf{x}, \omega')}{\omega - \omega'} d\omega',$$

$$\hat{g}_{jkh\ell}^I(\mathbf{x}, \omega) = -\frac{1}{\pi} p.v. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{g}_{jkh\ell}^R(\mathbf{x}, \omega')}{\omega - \omega'} d\omega',$$

et où $p.v.$ dénote l'intégrale en valeur principale de Cauchy, définie, pour une singularité en $x = x_s$, par

$$p.v. \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dx = \lim_{l \rightarrow +\infty, \eta \rightarrow 0^+} \left\{ \int_{-l}^{x_s - \eta} h(x) dx + \int_{x_s + \eta}^l h(x) dx \right\}.$$

Ces relations sont aussi appelées, dans le domaine de la physique, relations de Kramers-Kronig (K-K). Dans le cas d'une structure comportant des matériaux viscoélastiques, discrétisée par la méthode des

éléments finis, et pour laquelle il y a des incertitudes de modélisation, les matrices réduites aléatoires de raideur et d'amortissement issues du modèle stochastique numérique réduit vérifient la relation :

$$[\mathbf{K}(\omega)] = [\mathbf{K}(0)] + \frac{2\omega}{\pi} p.v. \int_0^{+\infty} \frac{1}{1-u^2} [\mathbf{D}(\omega u)] du \quad , \quad \forall \omega \geq 0 \quad (1)$$

et $[\mathbf{K}(\omega)] = [\mathbf{K}(-\omega)]$ pour ω négatif. Les matrices aléatoires $[\mathbf{K}(\omega)]$ et $[\mathbf{D}(\omega)]$ ne peuvent donc pas être modélisées par des matrices aléatoires indépendantes sans violer le principe de causalité, représenté par la relation (1), qui implique une dépendance statistique entre les processus stochastiques $\{[\mathbf{D}(\omega)] , \omega \in \mathbb{R}\}$ et $\{[\mathbf{K}(\omega)] , \omega \in \mathbb{R}\}$. Il est important de noter que la relation définie par l'Eq. (1) est nécessaire et suffisante pour assurer le principe de causalité. Dans notre cas, on ne retiendra donc que l'Eq. (1) qui permet de générer une raideur aléatoire compatible avec un modèle aléatoire d'amortissement.

Après avoir décrit la construction du modèle stochastique et présenté les spécificités numériques du problème, en particulier concernant le calcul des transformées de Hilbert dans un cadre matriciel, nous présenterons les résultats obtenus pour des simulations sur une structure composite simple.

2 Étude numérique

2.1 Structure étudiée

La structure étudiée est constituée d'une plaque composite élancée, tri-couche, comportant deux couches viscoélastiques différentes et une couche centrale purement élastique. Soumise à une force ponctuelle légèrement excentrée en une extrémité et encastrée en l'autre, cette structure est étudiée en dynamique linéaire dans le domaine fréquentiel sur la bande [0,400] Hz, pour laquelle la réponse permet de mettre en évidence la propagation des incertitudes. Le modèle nominal de cette structure d'étude a été calibré afin que les effets dépendants de la fréquence, notamment au niveau de la raideur du système, soient suffisamment importants. Les matériaux viscoélastiques ont donc été choisis afin, d'une part de respecter le comportement physique de ces matériaux, et d'autre part afin de créer un effet visqueux significatif dans la bande d'analyse. Les simulations numériques sont faites à l'aide d'un code éléments finis développé pour cette application. Sur la bande fréquentielle d'analyse, la convergence des réponses est obtenue pour un maillage comportant environ 450 000 DDL (voir Fig. 1). La réduction de modèle est faite en utilisant les modes élastiques de la structure à fréquence nulle. Une étude de convergence sur la bande d'analyse a conduit à retenir 400 modes. Cette réduction de modèle, nécessaire pour l'implémentation de la méthode non paramétrique, permet aussi de réduire le coût numérique de résolution du système à chaque fréquence, compte tenu de la nécessité de calculer la transformée de Hilbert sur les matrices d'amortissement comme le montre l'Eq. (1). La Fig 2 montre la réponse du système nominal déterministe calculée avec le modèle réduit d'ordre 400.

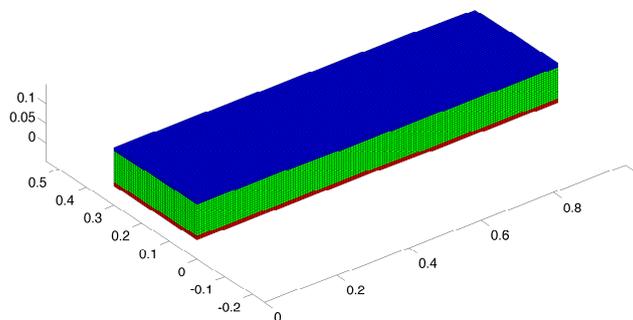


FIGURE 1 – Maillage éléments finis de la plaque composite tri-couche

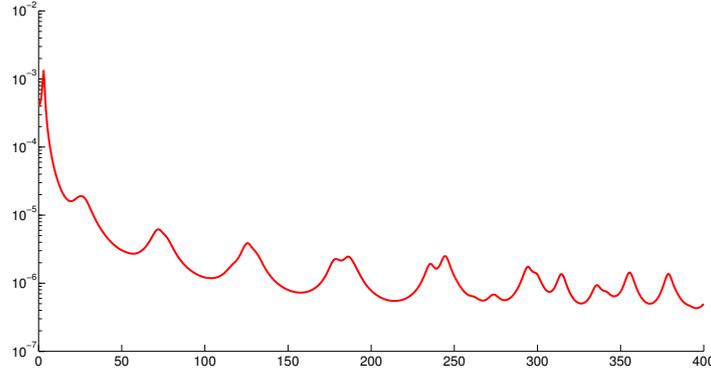


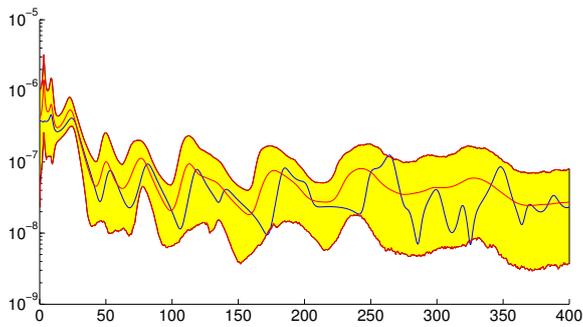
FIGURE 2 – Réponse du système nominal déterministe avec réduction de modèle : norme hermitienne de la réponse en coordonnées généralisées, en fonction de la fréquence (en Hertz)

2.2 Aspects numériques

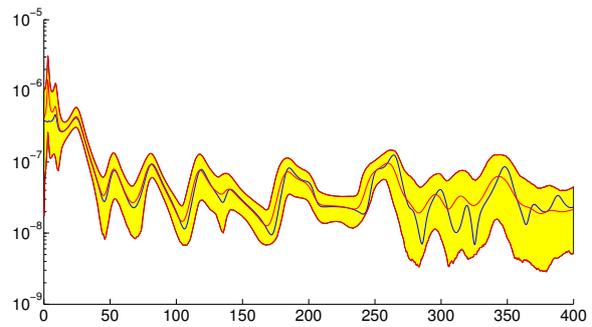
Les équations stochastiques dans le domaine fréquentiel sont résolues par la méthode de Monte Carlo. Par conséquent, pour chaque valeur de la pulsation ω dans la bande d'analyse, la réalisation $[\mathbf{K}(\omega, \theta)]$ de la matrice aléatoire de raideur $[\mathbf{K}(\omega)]$ est calculée par l'Eq. (1) dans laquelle la réalisation $[\mathbf{D}(\omega, \theta)]$ de la matrice aléatoire $[\mathbf{D}(\omega)]$ est introduite. La mise en oeuvre numérique de l'Eq. (1) nécessite alors une intégration numérique de l'intégrale singulière en u sur l'intervalle $[0, +\infty[$ de $[\mathbf{D}(\omega u, \theta)]/(1-u^2)$. Il est à noter que le caractère fortement dissipatif de la structure implique que l'approximation de l'intégrale en u ne peut pas être faite par troncature de l'intervalle d'intégration à un intervalle fini, sans générer d'erreurs importantes sur la matrice $[\mathbf{K}(\omega u, \theta)]$ calculée. Dans ces conditions, une méthode numérique adaptée a été développée. L'intégrale en u de 0 à $+\infty$ est découpée en deux. Une première sur l'intervalle $[0, 2]$ qui est calculée par la méthode des trapèzes et pour laquelle la singularité en $u = 1$ est traitée pour obtenir la valeur principale de Cauchy. La seconde partie, sur l'intervalle $[2, +\infty[$, est calculée par une méthode d'approximation par des polynômes orthogonaux [1, 4] et par une technique performante d'interpolation pour les matrices définies positives. La méthode numérique ainsi développée permet de minimiser, pour chaque réalisation, le nombre de calculs de la matrice d'amortissement réduite $[\mathbf{D}(\omega u, \theta)]$.

2.3 Analyse de la propagation des incertitudes

La propagation des incertitudes est analysée quantitativement par une étude de sensibilité aux hyper-paramètres du modèle stochastique non paramétrique. À des fins de comparaisons, une autre modélisation stochastique sera mise en parallèle avec la première, construite cette fois-ci de manière violant la causalité, où l'on supposera que les matrices aléatoires de raideur et d'amortissement sont statistiquement indépendantes. Cette autre modélisation possèdera pour le modèle stochastique de chaque matrice aléatoire un hyper-paramètre contrôlant la dispersion statistique et permettra donc de fixer un niveau d'incertitude sur la raideur indépendamment de celui sur l'amortissement. Cette comparaison montre une différence de comportement entre les deux modèles stochastiques et par conséquent, le modèle prenant en compte la causalité doit être utilisé. Les Figs. 3 (a) et (b) montrent la réponse du système en un DDL en fonction de la fréquence sur la bande $[0, 400]$ Hz. Pour le modèle prenant en compte la causalité, le niveau d'incertitude pour la matrice aléatoire $[\mathbf{K}(0)]$ est pris à 0.15 et pour l'autre modèle, le niveau d'incertitude pour les matrices aléatoires $[\mathbf{K}(\omega)]$ est également pris à 0.15. Pour les deux modèles, le niveau d'incertitude pour les matrices aléatoires d'amortissement $[\mathbf{D}(\omega)]$ est pris égal à 0.7. La comparaison des deux figures montre une différence très importante sur les domaines de confiance des réponses, induite par la prise en compte de l'Eq. (1). On peut donc conclure que le principe de causalité amplifie la propagation des incertitudes dans le système quand la fréquence croît.



(a) Modèle vérifiant la causalité



(b) Modèle avec raideur et amortissement indépendants

FIGURE 3 – Exemple de réponse du système en un d.d.l (en mètres) en fonction de la fréquence (en Hertz). Modèle nominal (bleu), moyenne du modèle stochastique (rouge) et intervalle de confiance à 95% (jaune)

3 Conclusion

Une analyse numérique a été développée pour prendre en compte le principe de causalité dans la modélisation probabiliste non paramétrique des incertitudes pour la dynamique linéaire des structures viscoélastiques. L'implémentation réalisée permet d'envisager des calculs sur de très grands modèles à un coût numérique raisonnable. Les premiers résultats obtenus sur une plaque composite tri-couche semblent montrer que la prise en compte du principe de causalité augmente le niveau des incertitudes propagées dans le système lorsque la fréquence croît.

Références

- [1] W. Gautschi. *The use of rational functions in numerical quadrature*, Journal of Computational and Applied Mathematics - Special issue on orthogonal polynomials, special functions and their applications, Vol. 133, Issues 1–2, pp. 111–126, Elsevier, 2002.
- [2] R. Ohayon, C. Soize. *Advanced Computational Vibroacoustics*, New York : Cambridge University Press, 2014.
- [3] A. Papoulis. *Signal Analysis*, New York : McGraw-Hill, 1977.
- [4] G. Perrin, C. Soize, D. Duhamel, C. Funfschilling. *Identification of polynomial chaos representations in high dimension from a set of realizations*, Journal on Scientific Computing, 34 (6) pp. A2917-A2945, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2012.
- [5] C. Soize. *A nonparametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics*, Probabilistic Engineering Mechanics, Vol. 15, No. 3, pp. 277–294, 2000.
- [6] C. Soize, I.E. Poloskov. *Time-domain formulation in computational dynamics for linear viscoelastic media with model uncertainties and stochastic excitation*, Computers and Mathematics with Applications, 64 (11), Elsevier, pp. 3594-3612, 2012.
- [7] C. Truesdell. *Encyclopedia of Physics, Vol. VIa/3, Mechanics of Solids III*, Berlin, Heidelberg, New York : Springer-Verlag, 1973.