

**Contributions à la modélisation simplifiée de la
mécanique des contacts roulants Contribution to the
simplified modelling of rolling contact mechanic**

Luc Chevalier, S. Cloupet, A. Heddahak-Ouni

► **To cite this version:**

Luc Chevalier, S. Cloupet, A. Heddahak-Ouni. Contributions à la modélisation simplifiée de la mécanique des contacts roulants Contribution to the simplified modelling of rolling contact mechanic. Mechanics & Industry, EDP Sciences, 2006, 7 (2), pp 155-168. 10.1051/meca:2006030 . hal-00782924

HAL Id: hal-00782924

<https://hal-upec-upem.archives-ouvertes.fr/hal-00782924>

Submitted on 30 Jan 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Titre : Contributions à la modélisation simplifiée de la mécanique des contacts roulants.

Title : Contribution to Simplified Modelling of Rolling Contact Mechanics.

Auteurs : Luc Chevalier*, Sylvain Cloupet, Anissa Eddhahak - Ouni

Luc Chevalier (Professeur des universités) :

Adresse : Laboratoire de Mécanique, Université de Marne La Vallée, 5, boulevard Descartes, 77454 Marne La Vallée Cedex 2 France.

N° téléphone: 0160957785

E-mail : Luc.Chevalier@univ-mlv.fr

Sylvain Cloupet (Doctorant) :

Adresse : LMT-Cachan, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 61 avenue du Président Wilson, 94230 Cachan cedex France

N° téléphone: 0147402242

E-mail : sylvain.cloupet@lmt.ens-cachan.fr

Anissa Eddhahak Ouni (Doctorante):

Adresse : Laboratoire de Mécanique, Université de Marne La Vallée, 5, boulevard Descartes, 77454 Marne La Vallée Cedex 2 France.

N° téléphone: 0160957790

E-mail : anissa.eddhahak@univ-mlv.fr

* *Auteur correspondant.*

Contributions à la modélisation simplifiée de la mécanique des contacts roulants.

Contribution to Simplified Modelling of Rolling Contact Mechanics.

Résumé : La modélisation de l'usure superficielle nécessite la mise en place d'un outil numérique de calcul des puissances dissipées lors du roulement sous charge de galets sur des pistes de came [1]. Compte tenu des dispersions relatives aux défauts géométriques et aux paramètres mal connus comme le coefficient de frottement par exemple, l'étude s'oriente vers une approche probabiliste [2] où le nombre de cas simulés devient très grand (environ 1000 simulations pour une géométrie et un chargement) et hors d'atteinte en des temps de calcul CPU raisonnables par une approche exacte. L'utilisation d'une approche simplifiée est alors nécessaire pour le calcul de la puissance dissipée dans le cas non hertzien généré par l'usure. Pour quantifier la précision (ou l'incertitude) d'une telle approche, nous présentons et discutons les choix qui ont été réalisés ; en particulier, l'approche simplifiée proposée par Kalker [3] est comparée avec les solutions de l'approche exacte, puis nous proposons des améliorations aux approches semi-hertziennes déjà utilisées dans [4].

Abstract: Numerical simulation of superficial wear requires the implementation of computational tools for calculation of dissipated power during loaded contacts of roller on track cam [1]. Uncertainties due to geometrical defects or to not well known parameters such as the friction ratio for example, yields to a probabilistic

approach [2] of the contact problem. Number of simulated cases becomes very important (approximately 1000 cases for a single geometry and loading) and cannot reasonably be treated by the exact approach which leads to long CPU time. A simplified approach was chosen to calculate the dissipated power for non-hertzian case generated by the wear. To quantify the precision of this approach, we present and discuss the choices which had been made. In particular, the simplified approach proposed by Kalker [3] is compared with the solutions of the exact approach, then we propose improvement of semi-hertzian approaches which are presented in [4].

Mots-clés: **mécanique du contact/ roulement stationnaire/ puissance dissipée/ solides hertiens/ quasi identité/ méthode des éléments diffus**

Keywords : **contact mechanic/ steady state rolling/ dissipated power/ hertzian solids/ quasiidentity/ diffuse elements method**

Nomenclature

a, b	demi axes de l'ellipse de contact respectivement suivant x et ym
a_i	abscisse d'un point de l'aire de contact.....m
A_{ci}	courbure locale corrigée.....m ⁻¹
A	premier membre d'un système à résoudre.....
B	courbure à diffuser.....m ⁻¹
A_i, B_i	courbures locales respectivement autour de y et xm ⁻¹
b_1	second membre d'un système à résoudre.....m
C_{11}, C_{22}, C_{23}	coefficients de la théorie linéaire de Kalkerm. MPa ⁻¹
C	coefficient de diffusion.....
C^*	coefficient de diffusion optimal.....
dS	aire d'une bande par l'approche exacte.....m ²
ds	aire d'une bande par l'approche semi hertzienne diffusée.....m ²
e	écart entre les 2 solides après déformation.....m
e_M	écart entre les 2 solides au point M.....m
E	module d'Young.....MPa
F	effort normal de contact.....N
G	module de rigidité.....MPa
G_1, G_2	modules de rigidité respectivement des solides (1) et (2).....MPa
h_0	indentation géométrique au centre.....m
h_i	rapprochement local.....m
I_y	fonction à minimiser.....m ⁻¹
k_i	élanement de l'ellipse à l'abscisse y_i
K	ordre de la dérivation.....
L	flexibilité moyenne.....
L_1, L_2, L_3	flexibilités associés respectivement aux pseudo glissements v_x, v_y et ϕ
L_y	taille de la zone d'étude en ym
M_x, M_y	découpages respectivement suivant x et y
m	compteur variant de 1 à K
$m! \alpha_m$	estimateur de la dérivée de la courbure.....
M_z	moment résultant.....N.m
N_1	nombre d'éléments dans la zone de potentielle de contact.....
N_y	nombre de points servant à la discrétisation du profil du galet suivant y
N	nombre de point servant à l'approximation nodale.....
p	pression de contact.....MPa
P_0	maximum de pression de Hertz.....MPa
p_M	pression de contact au point M.....MPa
P	nombre d'éléments à écarts négatifs.....
$p_i \alpha_i^*$	estimation du développement de Taylor.....m ⁻¹
R_{xg}, R_{yg}	rayons du galet respectivement autour de y et xm
R_{xe}, R_{ye}	rayons de l'éprouvette respectivement autour de y et xm
R_1, R_2	respectivement le rayon de raccordement et le rayon de bombé du galet « en biais ».....m
r	distance d'un point du massif au point d'application de la charge.....m
S	aire totale de la zone de contact par l'approche exacte.....m ²
T_x, T_y	efforts tangentiels résultants respectivement suivant x et yN
V	vitesse de renouvellement de contact.....m/s
u_b, v_b, w_b	composantes du champ de déplacement sous l'effet d'une charge ponctuelle sur

	un massif semi infini	m
u, v, w	composantes du champ de déplacement inconnu.....	m
w_1, w_2	déplacements verticaux respectivement des solides (1) et (2).....	m
w_x, w_y	vitesses de glissement respectivement suivant x et y	m/s
w	fonction de pondération.....	
x_s	seuil de saturation.....	m
y_i	ordonnée d'un point de l'aire de contact.....	m
y_j	abscisse des points.....	
\tilde{y}	longueur caractéristique.....	
x, y	coordonnées cartésiennes longitudinale et transversale.....	m
X_b, Y_b, Z_b	composantes de la charge ponctuelle.....	N
x', y'	position du point d'application de la charge ponctuelle.....	m
z	coordonnée verticale ascendante.....	m
z_g	profil du galet dans le plan (yOz).....	m
z_{gi}	profil du galet à l'abscisse y_i	m
τ_x, τ_y	contraintes tangentielle respectivement suivant x et y	MPa
μ	coefficient de frottement.....	
ν	coefficient de Poisson.....	
ν_1, ν_2	coefficients de Poisson respectivement des solides (1) et (2).....	
δ	rapprochement des 2 solides avant déformation loin du contact.....	m
τ	module de cisaillement.....	MPa
ϕ	spin.....	m ⁻¹
ν_x, ν_y	respectivement les pseudoglissements longitudinal et transversal.....	
Δy	largeur d'une bande de la zone de contact.....	m
α, β	coefficients d'interpolation.....	
λ_i	rapport des courbures locales.....	
ΔN_i	contribution en effort d'une bande.....	N
α_0	courbure diffusée.....	m ⁻¹

Introduction

Les bureaux d'études ont besoin d'outils de calculs prédictifs, fiables et rapides pour le dimensionnement de leurs composants et notamment pour la prédiction de l'usure rencontrée dans les contacts roulants est un point clef de la prévision de la durée de vie des systèmes mécaniques.

La modélisation de cette usure superficielle passe par l'identification d'une loi d'usure, dérivée des travaux d'Archard [5], qui est effectuée sur un banc d'essai reproduisant le comportement à l'usure d'un galet roulant sur une came. Ce banc industriel décrit dans [1], présente un nombre de paramètres incertains (jeux, dispersions géométriques...) et une approche probabiliste doit être mise en place pour envisager l'identification de la loi d'usure.

Devant le grand nombre de tirages à réaliser avec une telle approche, une modélisation par éléments finis ou par la méthode des éléments frontières du système d'équations à résoudre est tout à fait hors de portée des moyens de calcul d'un bureau d'étude de PME/PMI et des méthodes de calculs simplifiées doivent être développées.

Tout d'abord, cet article présente la résolution du problème de contact entre deux solides élastiques décrite par Johnson [6] et Kalker [7], puis les solutions approchées utilisées sont présentées ainsi que des comparaisons aux solutions exactes dans un cas purement hertzien. Enfin, la troisième partie propose d'étendre les approximations aux cas non-hertzien en rajoutant un terme de diffusion entre les bandes de contact pour « coller » au mieux à l'approche exacte.

1. Résolution du problème de contact

Afin de discuter la précision des approches simplifiées utilisées pour la simulation du contact roulant, nous allons brièvement rappeler les équations à résoudre dans un

problème de contact entre deux solides élastiques **1** et **2**. La mise en équation s'appuie sur la connaissance des composantes du champ de déplacement u_b , v_b et w_b sous l'effet d'une charge ponctuelle de composante X_b , Y_b et Z_b appliquée en un point d'un massif semi infini (Love [8], Boussinesq [9]). z est la normale au plan tangent du contact. L'intégration d'une distribution surfacique d'effort en chaque point de coordonnées (x', y') de l'aire de contact permet d'avoir accès à une distribution de contrainte dans le massif, plus réaliste que celle d'une charge ponctuelle.

Ainsi en négligeant la contribution des forces volumiques le problème se met sous la forme donnée par l'Eq. (1) où u_b , v_b et w_b sont des fonctions connues linéaires en X_b , Y_b , Z_b , τ_x et τ_y sont les contraintes tangentielles suivant la direction x et suivant la direction y et p désigne la pression suivant z .

$$\iint_{\text{contact}} (\tau_x(x', y')u_b + \tau_y(x', y')v_b + p(x', y')w_b) dx' dy' = u(x, y)X_b + v(x, y)Y_b + w(x, y)Z_b \quad (1)$$

Il convient donc de résoudre l'Éq. (1) pour chacun des solides avec de plus les conditions d'interface sur la zone de contact. Dans cette zone les forces surfaciques s'opposent et les déplacements normaux sont nuls. Par ailleurs, s'il y a du frottement entre les deux solides il convient d'introduire des lois de frottement. Dans la suite, nous utiliserons la loi de Coulomb avec μ le coefficient de frottement.

1.1. Chargement normal

Dans le cas où la charge appliquée est uniquement portée par z et où le frottement est négligé (c'est-à-dire $\tau_x = \tau_y = 0$), l'Éq. (1) permet le calcul du déplacement $w(x, y)$ normal à l'aire de contact provenant de la déformation par l'Éq. (2) :

$$w(x, y) = \frac{1-\nu}{2\pi G} \iint_{\text{contact}} \left\{ \frac{p(x', y')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} \right\} dx' dy' \quad (2)$$

Dans le cas d'un contact entre deux solides **1** et **2** avec l'axe z dirigé de **2** vers **1**, la différence de déplacement due à la déformation est donc donnée par :

$$w(x, y) = w_1(x, y) - w_2(x, y) = \frac{1-\nu}{\pi G} \iint_{\text{contact}} \left\{ \frac{p(x', y')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} \right\} dx' dy' \quad (3)$$

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{2G_1} + \frac{1}{2G_2} \quad \text{et} \quad \frac{\nu}{G} = \frac{\nu_1}{2G_1} + \frac{\nu_2}{2G_2}$$

Hertz propose une solution analytique de l'Éq. (3) dans le cas où les courbures sont constantes au niveau du contact. La zone de contact est alors elliptique (dimensions a et b) et la répartition de pression est ellipsoïdale. P_0 est donnée par l'Éq. (4). a et b sont déterminés à partir de coefficients m et n définis par des intégrales et généralement tabulés.

$$P_0 = \frac{3F}{2\pi ab} \quad (4)$$

Lorsque les courbures des corps en contact ne sont pas constantes, la recherche du déplacement $w(x,y)$ et de la pression de contact $p(x,y)$ se fait en résolvant l'Éq. (5).

$$e(x, y) = h(x, y) - \delta + \frac{1-\nu}{\pi G} \iint_{\text{contact}} \left\{ \frac{p(x', y')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} \right\} dx' dy' \quad \text{avec} \quad \begin{cases} e \geq 0 \\ p \geq 0 \end{cases} \quad (5)$$

L'écart e entre les deux solides après déformation est donné par l'écart h avant déformation, le rapprochement global δ loin de la zone de contact est une intégrale qui dépend de la pression p . Outre e et p qui sont inconnus, le premier à l'extérieur et le second à l'intérieur de la zone de contact, la zone de contact elle même n'est pas connue.

La résolution du problème est numérique : l'aire potentielle de contact est découpée en N_I éléments (Fig. 1) tel que $N_I = M_x \times M_y$ avec M_x et M_y sont respectivement les découpages suivant x et y . Sur chaque élément la pression inconnue est constante et l'intégrale est donc remplacée par une somme sur tous les éléments. Une méthode itérative permet de déterminer e_M et p_M de proche en proche par la démarche suivante : pour une valeur imposée de δ , on initie les variables en considérant que tous les

éléments sont extérieurs au contact, la pression est donc nulle partout et l'Éq. (5) permet l'estimation des e_M initiaux.

1. Tous les éléments pour lesquels l'écart e_M est négatif sont déclarés appartenant à l'aire de contact et leur écart est mis à 0. Soit P le nombre d'éléments appartenant à l'aire de contact, on résout le nouveau système de P équations ainsi obtenu et on détermine les P valeurs de pression p_M inconnues.
2. Tous les éléments pour lesquels la pression p_M est négative sont déclarés ne faisant pas partie du contact et leur pression est mise à 0. On recalcule les écarts e_M avec les nouvelles valeurs de pression.

On itère ainsi entre le point 1 et le point 2 jusqu'à ce que toutes les pressions soient positives ou nulles et tous les écarts soient positifs ou nuls. Ceci permet de délimiter la zone de contact dans l'aire potentielle. La méthode est d'autant plus précise que le découpage de l'aire est fin mais conduit à des temps de calcul assez importants.

La méthode est illustrée (Fig. 2) sur le cas du contact normal entre un galet (g) et un rondin-éprouvette (e). Les deux solides sont de révolution en acier de caractéristiques géométriques : $R_{xg} = 20$ mm, $R_{yg} = 500$ mm, $R_{xe} = 25$ mm et R_{ye} qui tend vers l'infini. Les caractéristiques élastiques du matériau valent : module d'Young $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Pa, coefficient de poisson $\nu = 0,28$ et la charge appliquée est $F = 1500$ N. Les courbures constantes et les relations de Hertz donne la solution $a = 0,23$ mm et $b = 2,63$ mm.

Numériquement, l'allure plus ou moins lisse de la pression de contact dépend du nombre de points N_y servant à la description du profil du galet $z_g = f(y)$ dans le plan (yOz). La discrétisation adoptée pour le découpage de l'aire de contact influence elle aussi la finesse des résultats. Sur la Fig. 3 on observe les effets de ces deux discrétisations sur la répartition de pression et la forme de l'ellipse de contact. Pour un découpage assez fin $M_x \times M_y = 100 \times 50$ et une discrétisation des profils par plus de 10 points, les erreurs de géométrie entre la méthode numérique et le calcul analytique ne

dépasse pas 1%. Notons que l'éclatement est assez fort et que le découpage doit être plus fin suivant x que suivant y .

L'approche numérique devient indispensable lorsque les courbures ne sont pas constantes au voisinage du point de contact. Dans le cas du galet-rondin, lorsque le point de contact se rapproche des flancs du galet, il y a un raccordement entre deux courbures très différentes. C'est un cas assez sévère (Fig. 4) que nous appelons « galet en biais ». Pour comparer de manière un peu systématique avec l'approche simplifiée qui sera présentée plus loin, on étudie plusieurs valeurs du rayon de raccordement entre 1 et 500 mm.

Les formes des zones de contact sont données sur la Fig. 5. Lorsque le rayon de raccordement est faible, l'éclatement de la zone de contact, située en $y < 0$, est plutôt dirigée suivant x puisque le rayon du galet dans le plan (xOz) est plus élevé ($R_{yg} = 20$ mm). L'éclatement suivant x diminue au fur et à mesure que le rayon de raccordement augmente pour redonner l'ellipse de Hertz pour $R_1 = R_2$.

1.2. Problème complet du contact roulant

Dans le cas où le frottement n'est pas négligeable, des cisaillements apparaissent. Ils sont liés aux déplacements relatifs. Le système d'équations ainsi obtenu est a priori couplé mais dans le cas particulier de deux solides de caractéristiques élastiques identiques, il se réduit au système de l'Éq. (6).

$$\begin{cases} u(x, y) = \frac{1}{\pi G} \iint_{\text{contact}} \left(\left\{ \frac{1-\nu}{r} + \frac{\nu(x-x')^2}{r^3} \right\} \tau_x(x', y') + \frac{\nu(x-x')(y-y')}{r^3} \tau_y(x', y') \right) dx' dy' \\ v(x, y) = \frac{1}{\pi G} \iint_{\text{contact}} \left(\frac{\nu(x-x')(y-y')}{r^3} \tau_x(x', y') + \left\{ \frac{1-\nu}{r} + \frac{\nu(y-y')^2}{r^3} \right\} \tau_y(x', y') \right) dx' dy' \\ w(x, y) = \frac{1-\nu}{\pi G} \iint_{\text{contact}} \frac{p(x', y')}{r} dx' dy' \end{cases} \quad (6)$$

$$\text{avec } r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$$

Ces équations montrent un découplage du problème normal avec le problème tangent. Réciproquement, bien que la pression n'intervient pas explicitement dans les deux premières équations, les cisaillements τ_x et τ_y ne sont pas indépendants de la pression puisqu'ils sont liés par l'inégalité de la loi de frottement de Coulomb (Éq. (7)) où μ est le coefficient de frottement et τ le module du cisaillement.

$$\tau = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \tau \leq \mu p & \text{si} \quad \vec{w} = \vec{0} \\ \tau = \mu p & \text{si} \quad \vec{w} \neq \vec{0} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \vec{\tau} = -\frac{\mu p}{|\vec{w}|} \vec{w} \quad (7)$$

Dans le cas du roulement stationnaire, le système d'équations cinématiques du contact galet/rondin est donné par l'Éq. (8)

$$\begin{cases} \frac{w_x}{V} = v_x - \phi y - \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{w_y}{V} = v_y + \phi x - \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad (8)$$

Où w_x et w_y désignent les composantes de la vitesse de glissement entre les deux corps, V la vitesse de renouvellement de contact, v_x , v_y et ϕ sont respectivement les pseudo glissements longitudinal, transversal et de spin, u et v sont les composantes du déplacement relatif entre les deux solides provenant des déformations présentées dans le système (6).

La démarche de résolution est itérative : on suppose un état initial pour lequel la zone d'adhérence est confondue avec la zone de contact. Le système (8) permet le calcul des déplacements u et v . Une fois l'aire potentielle de contact discrétisée, les deux premières équations du système (6) donnent un système linéaire qui permet de déterminer τ_x et τ_y par inversion. L'inégalité de l'Éq. (7) permet ensuite de distinguer les points où le cisaillement sature (zone de glissement) et ceux pour lesquels il y a adhérence. Cette partition permet d'affiner la zone où $w_x = w_y = 0$. On réitère la démarche jusqu'à stabilisation entre zone d'adhérence et de glissement.

La Fig. 6 montre cette partition dans le cas du contact galet-rondin à courbures constantes. Les données supplémentaires par rapport à l'exemple du contact normal sont : coefficient de frottement $\mu = 0,1$, pseudo glissement longitudinal $v_x = 10^{-3}$, pseudo glissement transversal $v_y = 0$, pseudo glissement de spin $\phi = 0$ et la vitesse de renouvellement du contact $V = 2,6$ m/s. La zone de contact est découpée en une zone d'adhérence et une zone de glissement. Les forces surfaciques tangentielles ont un aspect quasiment linéaire sur la zone d'adhérence puis une forme elliptique à la saturation. Les vitesses de glissement sont nulles sur la partie collante et augmentent linéairement dans la zone de glissement atteignant ainsi un maximum fini sur le bord de fuite de l'ellipse de contact.

Notons que le problème de roulement stationnaire décrit par les Éq. (6), (7) et (8) trouve une solution analytique presque exacte lorsqu'on fait l'hypothèse d'adhérence totale (ce qui correspond à un frottement très fort ou à des pseudo glissements très faibles). Dans ce cas le système de l'Éq. (8) donne u et v en fonction des pseudoglissements. Par identification de u et v avec les expressions du système (6) on peut en déduire les charges tangentielles résultantes T_x et T_y ainsi que le moment résultant M_z qui s'oppose au pivotement : c'est un résultat de la théorie linéaire de Kalker (T.L.K) développé dans [10].

Dans les deux parties suivantes, nous allons discuter les méthodes approchées présentées en comparant leurs performances aux résultats de l'approche exacte.

2. Résolution approchée du contact roulant

Dans cette partie, nous présentons la résolution simplifiée proposée par Kalker et qui est à l'origine de l'algorithme FastSim. L'hypothèse simplificatrice de la mise en équations par FastSim est appelée « tapis de ressort ». Elle considère la proportionnalité entre les déplacements et les efforts de cisaillement de manière globale par les relations :

$$\begin{cases} u = L\tau_x \\ v = L\tau_y \end{cases} \quad (9)$$

où L est la flexibilité de contact.

L'identification des résultantes T_x et T_y obtenues par résolution du système (9) et le système (8) avec celles de la théorie linéaire de Kalker n'est possible que si l'on considère trois coefficients de flexibilité distincts L_1 , L_2 et L_3 associés respectivement aux pseudo glissements v_x , v_y et ϕ qui sont de la forme :

$$L_1 = \frac{8a}{3C_{11}G}, \quad L_2 = \frac{8a}{3C_{22}G}, \quad L_3 = \frac{\pi a \sqrt{a/b}}{4C_{23}G} \quad (10)$$

Dans le cas où tous les pseudo glissements coexistent, B. Soua [11] propose une flexibilité moyenne par :

$$L = \frac{L_1|v_x| + L_2|v_y| + L_3|\phi\sqrt{ab}|}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + \phi^2 ab}} \quad (11)$$

En définitif, le système d'équations à résoudre par FastSim sera donc :

$$\begin{cases} \frac{w_x}{VL} = \frac{v_x}{L_1} - \frac{\phi y}{L_3} - \frac{\partial \tau_x}{\partial x} \\ \frac{w_y}{VL} = \frac{v_y}{L_2} + \frac{\phi x}{L_3} - \frac{\partial \tau_y}{\partial x} \end{cases} \quad (12)$$

Il faut noter que :

- i) la définition des L_i fait apparaître des dimensions globales de l'ellipse de Hertz et que la généralisation aux contacts non hertziens n'est pas évidente,

- ii) les résultats de cette approche seront d'autant plus corrects que le frottement sera fort ou les pseudo glissements seront faibles,
- iii) Kalker n'utilise pas le moment M_z dans son identification des L_i , or ce dernier n'est pas compatible avec les expressions de L_1 , L_2 et L_3 . Il faut donc prévoir des écarts importants lorsqu'il y a beaucoup de spin.

Pour illustrer cette démarche de résolution, nous considérons à nouveau la géométrie de contact galet-rondin.

2.1. Exemple d'illustration par FastSim : deux cas de répartition de pression

Le problème normal étant découplé du problème tangent, on considère dans un premier temps que la répartition normale de pression est elliptique (Fig. 7. Colonne de gauche).

L'aire de contact est composée de 2 zones disjointes : adhérente et glissante. La zone d'adhérence part du bord d'attaque $x = a_i$ et limitée par une valeur de x_S qui est proportionnelle à la largeur $2a_i$ de la bande y_i considérée. Au delà de cette zone, les cisaillements saturent suivant la loi de frottement de Coulomb et il y a glissement jusqu'au bord de fuite $x = -a_i$. Dans cette zone, le système (12) donne la vitesse de glissement. On notera l'allure asymptotique au voisinage du bord de fuite. Néanmoins, la puissance surfacique dissipée au contact reste finie sur toute la zone de contact.

Comme alternative à cette singularité, Kalker propose une répartition parabolique de pression ne conduisant pas à une vitesse infinie (Fig. 7, colonne droite).

Dans le cas de la répartition parabolique, certaines bandes de l'ellipse sont totalement glissantes. Ces bandes, qui se situent aux extrémités latérales de l'ellipse, ne présentent pas de zone d'adhérence. Ce qui est en contradiction avec l'hypothèse d'un contact collant sur le bord d'attaque. La vitesse de glissement présente une discontinuité lors de la transition entre la zone collante et la zone glissante (comme dans le cas elliptique), mais on peut observer qu'elle reste finie et d'allure linéaire.

2.2. Comparaison avec l'approche exacte et validation du chargement dans FastSim

Le découpage de la zone de contact diffère entre l'approche exacte et les deux répartitions de pression de l'approche simplifiée. La saturation n'est pas atteinte au même endroit pour les trois modèles, ce qui résulte en une zone d'adhérence plus petite par la théorie exacte que celle par FastSim. Bien que la répartition parabolique donne une meilleure allure de saturation, le cas elliptique fournit des zones de saturation (S) et d'adhérence (A) d'aires plus voisines de l'approche exacte comme l'illustre la Fig. 8. titre indicatif, nous donnons l'aire de la zone d'adhérence par les trois approches :

- Approche exacte : 0,87 mm²
- Fastsim elliptique : 1,12 mm²
- Fastsim parabolique : 1,27 mm²

En terme de puissance dissipée au contact, nous obtenons des valeurs finies par les trois modèles. Le tableau 1 chiffre le maximum des puissances surfacique et linéique et quantifie l'écart par rapport à la résolution du problème exact.

Cette comparaison milite pour le chargement elliptique dans l'approche simplifiée. Hormis l'allure non physique de la vitesse de glissement, le cas elliptique donne des résultats plus proches du calcul exact. L'allure de la vitesse de glissement est qualitativement satisfaisante en parabolique, quantitativement, l'écart reste très important.

On définit la puissance linéique comme la somme des puissances surfaciques le long d'une ligne $y = \text{cste}$ et la puissance totale comme la somme de ces puissances sur toute l'ellipse de contact. Une fois de plus, la comparaison montre que le cas parabolique dissipe légèrement plus que le cas elliptique comme montré dans la Fig. 9. En terme de puissance linéique, les deux cas de chargement surestiment cette variable par rapport à l'approche exacte.

Toutes ces constatations nous laissent privilégier le chargement elliptique dans le modèle simplifié FastSim. Dans la suite, seul ce type de chargement sera considéré.

3. Approche semi hertzienne

3.1. Principe de l'approche semi-hertzienne

FastSim est un outil de calcul rapide mais limité aux corps hertiens. Dès lors que les courbures ne sont plus constantes (après usure par exemple), il faut être capable de déterminer la zone de contact avant le calcul des efforts tangentiels. A partir des travaux de Kik et Piotrowski [12], divers auteurs proposent une approche dite semi hertzienne analogue à Telliskivi [13]. L'idée consiste à estimer la zone de contact en se basant sur la pénétration virtuelle des corps à l'état non déformés. L'intersection des surfaces des corps limite une forme de contact. Cependant dans le cas hertzien, cette approche donne une forme elliptique ayant un élanement différent que celui de Hertz. C'est ainsi qu'une correction est mise en place consistant à modifier la courbure initiale A .

Dans le cas semi hertzien, les deux corps sont de révolution mais de profils quelconques et le principe de correction doit se faire bande par bande.

Dans ce qui suit, nous présentons brièvement la démarche de résolution du problème semi hertzien :

- On choisit une interpénétration h_0 et on délimite la largeur de la zone intersection entre les deux profils non déformés.
- On découpe cette largeur en M_y bandes de largeur Δy .
- Sur chaque bande autour de l'abscisse $y = y_i$, on calcule les courbures A_i et B_i et on effectue la correction A_{ci} de la courbure A_i grâce aux relations :

$$A_{ci} = \beta^2 \cdot \lambda_i^{2\alpha-1} A_i \quad (13)$$

où :

$$\lambda_i = \frac{A_i}{B_i} \quad (14)$$

α et β sont des coefficients figurant dans l'interpolation en loi puissance de l'élanement hertzien k_i (qui tient compte de la déformation) et l'élanement dû à l'interpénétration virtuelle des deux solides donné par :

$$k_i = \beta \cdot \lambda_i^\alpha \quad (15)$$

- On calcule sur chaque bande le rapprochement local h_i par la relation:

$$h_i = h_0 - z_{gi} \quad (16)$$

Cela permet de caractériser la géométrie locale de la zone de contact dans une bande d'abscisse $y = y_i$:

$$a_i = \sqrt{\frac{h_i}{A_{ci}}} \quad (17)$$

- En considérant une répartition elliptique de chargement, on peut calculer la contribution en effort de chaque bande ΔN_i par la formule :

$$\Delta N_i = \frac{E h_i}{2(1-\nu^2)} \cdot \frac{1 + \lambda_i}{n_i^3} \cdot \Delta y \quad (18)$$

On vérifie si la somme de ces charges sur toute l'aire de contact est égale à la charge normale globale F : c'est le critère de convergence de la méthode.

- Nous augmentons ou réduisons la valeur de l'interpénétration en fonction du résultat choisi jusqu'à vérifier le critère : $\sum_i \Delta N_i = F$ (19)

La pertinence de la méthode est tout d'abord testée sur le cas assez sévère (fort élanement) du contact galet-rondin. Lorsque les courbures sont constantes, la méthode doit permettre de retrouver l'ellipse de Hertz.

Le résultat obtenu est évidemment excellent : les valeurs de a et b valent 0,24 et 2,8 mm, soit un ratio b/a de 11,48. Sur la Fig. 10, on représente : (a) la distribution ΔN_i

obtenue en superposition de l'expression analytique et (b) les dimensions a_i de l'ellipse de contact en superposition de l'ellipse de Hertz (théorique).

La Fig. 11 présente la forme de la zone de contact pour des rayons de raccordement variables dans le cas du galet en biais décrit au paragraphe 1.2.3. Lorsque le rayon de raccordement est égal au rayon initial du galet (500 mm), nous retrouvons l'ellipse de Hertz. Pour des rayons de raccordement plus faibles, nous constatons l'apparition de pointes au niveau de la zone de transition entre les deux courbures. Ces pointes sont d'autant plus grandes que le rayon de raccordement est petit. Elles sont dûes à la variation brutale de la courbure.

Comparant les résultats du modèle semi hertzien aux résultats de l'approche exacte présentés au paragraphe 1.2.3, nous constatons que ces pointes sont plus marquées avec l'approche semi hertzienne. Néanmoins, les dimensions de l'aire de contact sont très voisines et varient de la même manière que pour l'approche exacte.

L'origine de ces pointes provient du découplage entre les caractéristiques élastiques des bandes. Nous proposons d'atténuer l'effet de ce découplage par une diffusion d'information entre les bandes.

3.2. Diffusion entre les bandes

Le principe de résolution de la méthode est toujours conservé. Néanmoins, pour contourner les effets du découplage nous allons régulariser l'allure du profil du galet dans le plan (yOz) . Les méthodes de lissage sont assez nombreuses et nous adopterons une diffusion par la méthode des éléments diffus [14] et [15].

La méthode des éléments diffus est utilisée dans la discrétisation des problèmes des milieux continus sans maillage. Elle consiste à trouver une approximation nodale d'une fonction définie par un nombre N fini de points d'abscisse y_j . Elle donne ainsi accès, en ces points, aux K premières dérivées (K ordre de la méthode) de la fonction initialement discrète. Appliquée à la courbure $B(y)$, cette approximation génère en un point une

estimation du développement de Taylor à l'ordre K de B en y de la forme

$$B(y) = \sum_{i=0,K} p_i(y) \cdot \alpha_i^*(y) \quad (20)$$

en choisissant le vecteur $\alpha^*(y)$ qui minimise l'écart quadratique :

$$I_y(\alpha) = \sum_{j=1,N} w(y_j - y) [B(y_j) - p^T(y_j - y) \cdot \alpha(y)]^2 \quad (21)$$

où N est le nombre de points de la discrétisation, w est la fonction de pondération choisie positive, maximale à l'origine et rapidement décroissante en s'en éloignant, de la forme :

$$w(\tilde{y}) = \exp(-C\tilde{y}^2) \quad \text{avec : } \tilde{y} = \frac{y}{L_y} \quad (22)$$

Il faut noter que le terme \tilde{y} figurant dans l'Éq. (22) est sans dimension. L_y est une dimension caractéristique du domaine d'étude de la fonction à régulariser. Le minimum de I_y est atteint en α^* solution de :

$$A(y) \cdot \alpha(y) = b_I(y) \quad (23)$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} A(y) = \sum w(y_j - y) p(y_j - y) p^T(y_j - y) \\ b_I(y) = \sum w(y_j - y) B(y_j) p(y_j - y) \end{cases} \quad (24)$$

Une fois résolu, le vecteur α permet d'obtenir la nouvelle fonction $B(y)$ par :

$$B(y) = \alpha_0(y) \text{ et } D^m(B(y)) = m! \alpha_m(y) \text{ pour } m \text{ variant de } 1 \text{ à } K \quad (25)$$

La Fig. 12 présente le résultat de la technique des éléments diffus d'une fonction bruitée telle que pourrait être un relevé de points sur un profil usé.

Les caractéristiques de la fonction de pondération w génèrent un effet de lissage. L'accroissement du paramètre C de l'Éq. (22) entraîne un élargissement de la notion de voisinage et par conséquent un lissage plus important. En revanche une diminution de ce paramètre fait rétrécir cette fenêtre, ce qui rend le lissage moins prononcé.

Cette observation nous permet d'adopter le meilleur paramètre C pour réaliser le minimum d'erreur aux résultats obtenus par l'approche exacte. C'est ainsi que nous

sommes amenés à rechercher le paramètre C optimal en fonction de la plus ou moins brutale variation de courbure.

3.3. Optimisation et comparaison avec la solution exacte

Cette démarche consiste à calculer pour chaque rayon de raccordement le coefficient C optimal qui réalise le minimum de l'erreur défini comme suit :

$$Erreur(C) = \frac{\sum_{bandes} |dS - ds|}{S} \quad (26)$$

où :

dS : Aire de la bande i donnée par la théorie exacte.

ds : Aire de la bande i donnée par le modèle semi hertzien avec diffusion.

S : Aire de la zone de contact par la théorie exacte.

Cette démarche va nous permettre de trouver l'optimum des coefficients C en comparant à chaque calcul l'aire de la zone de contact obtenue par la méthode semi hertzienne avec l'aire exacte. Sur la Fig. 13, nous comparons quelques résultats de cet essai dans le cas extrême où le rapport $\frac{R_1}{R_2} = 0,002$ pour différentes valeurs de C .

De toutes ces solutions, nous déterminons le coefficient C^* vérifiant :

Erreur (C^*) = minimum (erreur (C)) grâce au critère (26). Le paramètre de diffusion retenu est $C^* = 3,5$ avec erreur (C^*) = 8,75% (Fig. 14). Sur la Fig. 15, on présente la variation de l'erreur en fonction du paramètre de diffusion où l'on voit clairement l'optimum qui correspond à une portion assez plate de la courbe. Il existe donc une plage assez large de valeur de C qui donne un résultat tout à fait satisfaisant.

Pour chaque rapport $\frac{R_1}{R_2}$ donné, nous déterminons cette valeur C^* . Sur la Fig. 16, on peut observer une large plage [0,2; 1] pour laquelle le paramètre C^* est constant.

Lorsque $\frac{R_1}{R_2}$ est inférieur à 0,2, le coefficient C^* varie peu et reste inférieur à 5. Il

semble donc qu'une valeur unique de C^* convient de manière très satisfaisante (erreur < 9 %) à toutes les géométries de raccordement. Ce résultat n'est valable que pour une géométrie variant peu autour des dimensions de contact galet-cylindre (ces variations provenant de l'usure ou de dispersions autour d'une valeur moyenne). Dans la mise en place d'un outil de simulation d'usure, c'est bien le cas : l'usure génère des variations de dimensions assez faibles.

Après diffusion, les résultats de l'approche semi hertzienne sont très analogues à ceux obtenus par l'approche exacte : les « pointes » sont fortement atténuées et les dimensions de la zone de contact correspondent mieux à la solution exacte (Fig. 17).

Au niveau du temps de calcul, nous avons constaté dans le cas $R_l = 500$ mm (cas hertzien) qu'avec un découpage $M_x \times M_y = 100 \times 50$, l'approche exacte met environ 80 fois plus du temps pour la convergence que l'approche semi hertzienne avec diffusion testé avec la même discrétisation en M_x et M_y sur un PC pentium III. Notons que le problème exact est programmé en Fortran alors que l'approche SHAD est implanté dans l'environnement Matlab® et n'est pas optimisé.

Nous chiffrons dans (Tableau 2) les dimensions de la zone de contact du galet en biais par l'approche semi hertzienne et l'approche exacte avec et sans diffusion. Il est clair que le modèle semi hertzien avec diffusion donne de très bonnes approximations. Nous désignons par L_x la largeur de la zone de contact et par L_y sa longueur.

4. Conclusions

Nous avons présenté quelques outils de résolution approchée du problème de contact. Une étude comparative de l'approche simplifiée FastSim avec le modèle exact nous permet de retenir le choix d'une répartition elliptique de la pression de contact. Les écarts constatés par rapport à l'approche exacte sur la puissance surfacique et la puissance linéique, paramètres déterminants dans la simulation d'une loi d'usure, sont plus élevés en répartition parabolique qu'en répartition elliptique. Le problème de la

vitesse de glissement qui tend vers l'infini sur le bord de fuite, qui semble être l'argument principal pour le choix de la répartition parabolique, donne une puissance finie dissipée surfacique pour une répartition elliptique.

Dans le cas des courbures non constantes, une approche semi hertzienne issue des travaux antérieurs de [4] et [12] a été mise en place. Elle nécessite une correction de la courbure mais aussi une procédure de diffusion permettant d'estomper les irrégularités de la zone de contact dues à la transition brutale des courbures pour bombé du « galet en biais » au rayon de raccordement. Cette méthode, environ 80 fois plus rapide que l'approche exacte, permet d'obtenir une bonne approximation de l'aire de contact sans introduire plus d'un seul coefficient C^* de réglage dans la méthode. De plus, une optimisation de la méthode des éléments diffus montre qu'une valeur unique de C^* convient à une large plage de rapport R_1/R_2 ce qui rend l'approche assez générale.

Cette approche reste à tester sur des géométries plus critiques : conformité des contacts, existence de zone à courbure négative, influence du rapport des courbures B/A . Cet outil de détermination rapide de l'aire de contact va permettre la simulation numérique de l'usure de manière itérative avec réactualisation des profils au cours du temps est couplée à l'approche probabiliste pour la prise en compte des dispersions expérimentales dans la démarche d'identification.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] L. Chevalier, H. Chollet, Endommagement des pistes de roulement, *Mec. Ind.* 1 (2000) 77-103.
- [2] L. Chevalier, S. Cloupet, C. Soize, Probabilistic approach for wear modelling in steady state rolling contact, *Wear* 258 (2005) 1543-1554.
- [3] J. J. Kalker, A Fast Algorithm for the Simplified Theory of Rolling Contact, *Vehicle Syst. Dyn.* 11 (1982) 1-13.
- [4] J. B. Ayasse, H. Chollet, Determination of the Wheel Rail Contact Patch in Semi-Hertzian Conditions, *Vehicle Syst. Dyn* En cours d'impression (2005).
- [5] J.F. Archard, Contact and rubbing of flat surfaces, *J. Appl. Phys.* 24 (1953) 981-988.
- [6] K.L. Johnson, *Contact Mechanics*, Cambridge University Press, 1985.
- [7] J. J. Kalker, On the rolling contact of two elastic bodies in presence of dry friction, Thesis Dpt of Méchanical Engineering, Delft University of Technology, 1967.
- [8] A .E. H. Love, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Dover Publications, New York, 1944.
- [9] J. Boussinesq, *Application des potentiels à l'équilibre et du mouvement des solides élastiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1885.
- [10] J. J. Kalker, B. Jacobson, *Rolling Contact Phenomena: Linear Elasticity*, Berlin, 2000.
- [11] B. Soua, Étude de l'usure et de l'endommagement du roulement ferroviaire avec essieux non rigides, Thèse ENPC, 1997.
- [12] W. Kik, J. Piotrowski, A fast approximative method to calculate normal load at contact between wheel and rail, and creep forces during rolling, Warsaw Technical University, 2nd mini-conference on contact mechanics and wear of rail/wheel systems, Budapest, 1996.

- [13] T. Telliskivi, Simulation of wear in a rolling–sliding contact by a semi-Winkler model and the Archard’s wear law, *Wear* 256 (2004) 817-831.
- [14] M. C. Costa , J. Coulomb, Y. Maréchal, S.I. Nabeta, An Adaptative Method Applied to the Diffuse Element Approximation in Optimization Process, *IEEE Transactions on magnetics* 37, 5 (2001) 3418-3422.
- [15] B. Nayroles, G. Touzot, P. Villon, La méthode des éléments diffus, *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. II* 313 (1991) 133-138.

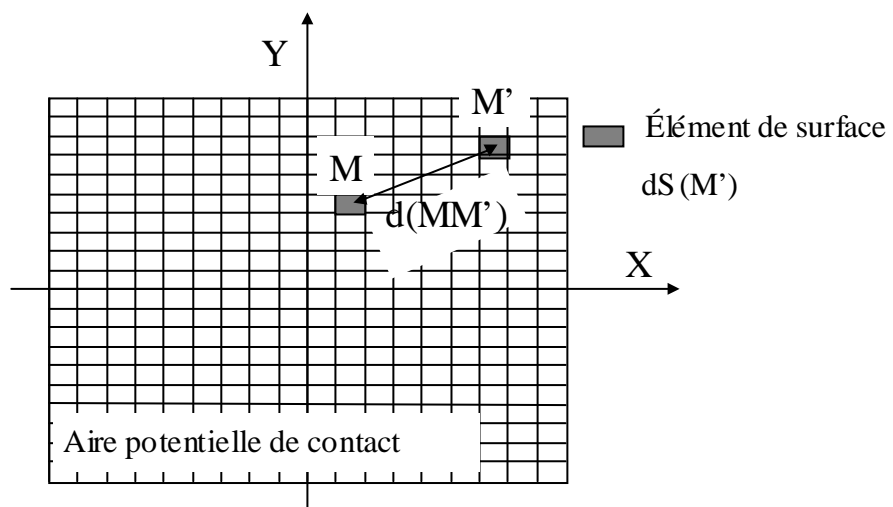


Fig. 1. Découpage de l'aire potentielle de contact.

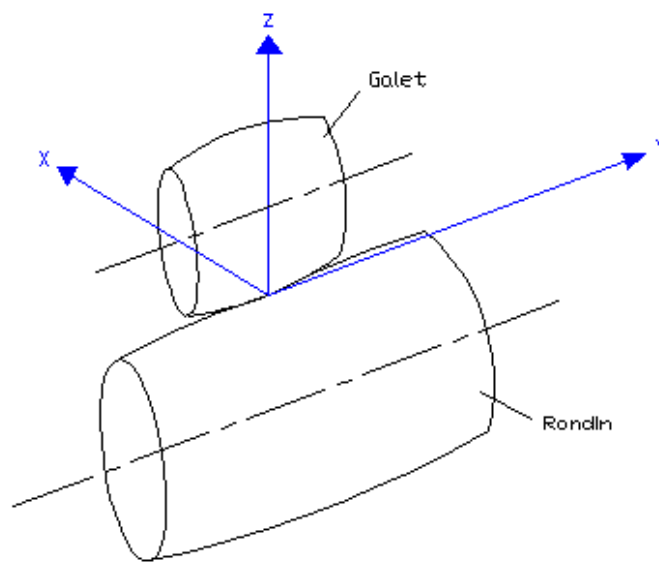


Fig. 2. Repérage des corps en contact.

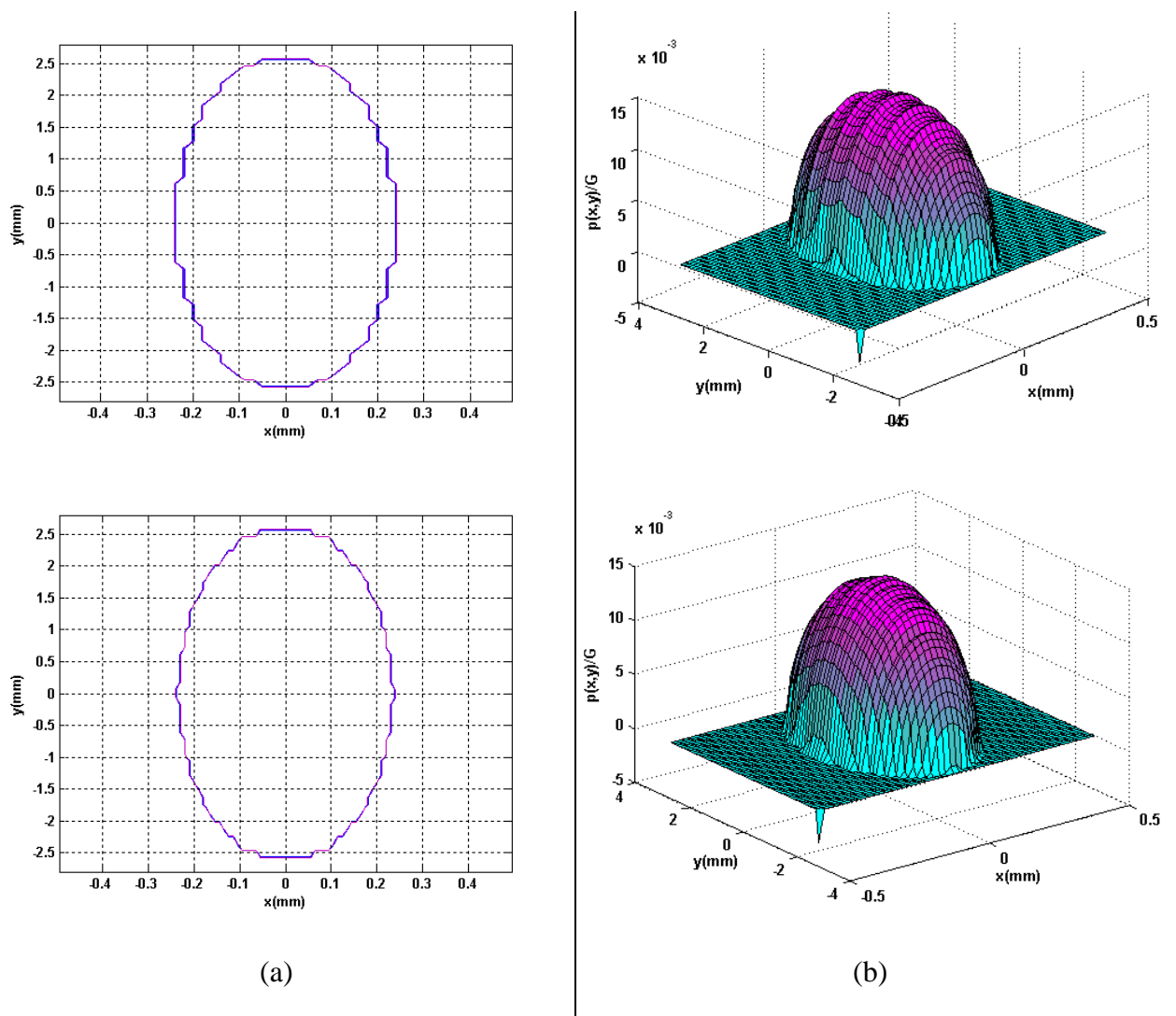


Fig. 3. (a) influence de la discrétisation sur l'aire de contact pour un découpage $M_x \times M_y = 50 \times 50$ (en haut) et 100×50 (en bas) de l'aire potentielle avec $N_y = 10$ (dans les 2 cas)
 (b) influence de la description du profil du galet sur l'aspect de la répartition de pression : calculs avec $N_y = 10$ (en haut) et 40 (en bas), $M_x \times M_y = 50 \times 50$ (dans les 2 cas)

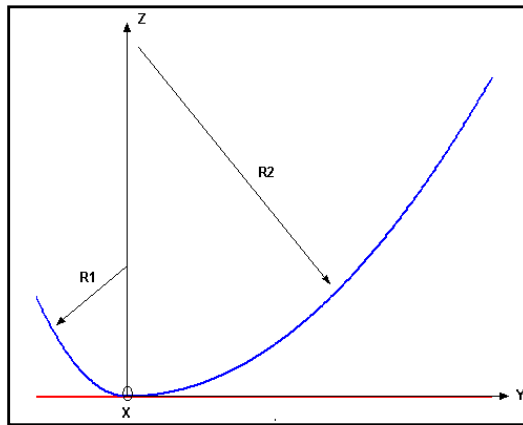


Fig. 4. Profil initial dans le plan (yOz) d'un exemple non Hertzien : « galet en biais ».

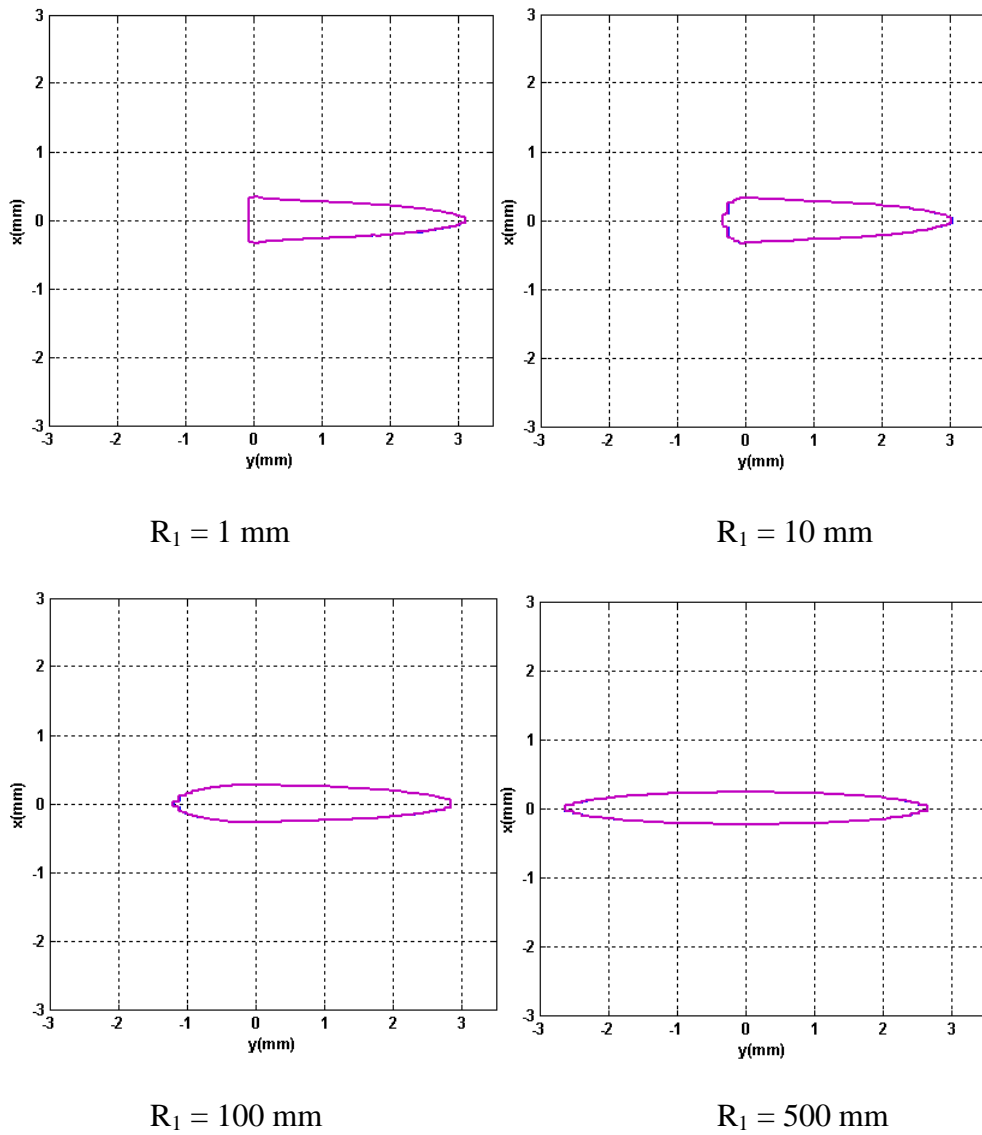
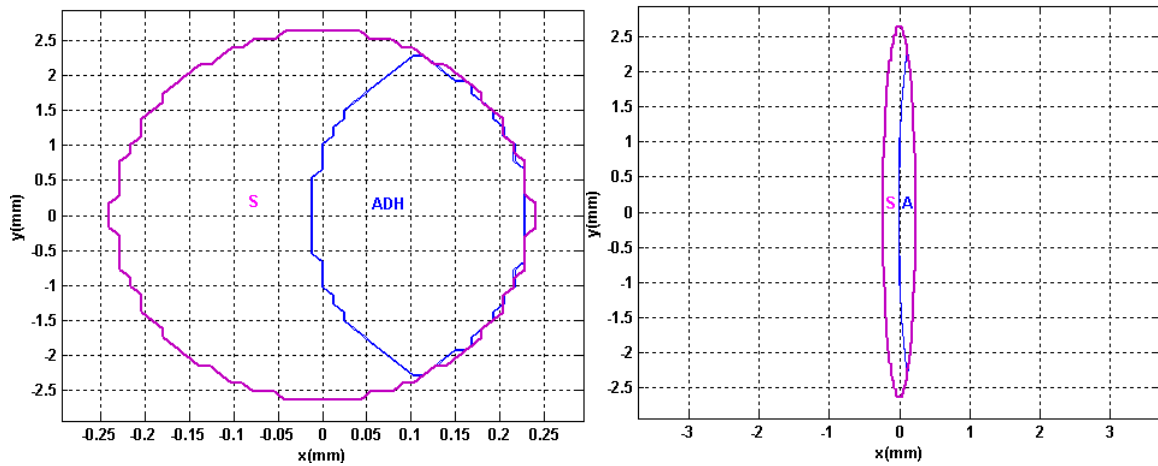
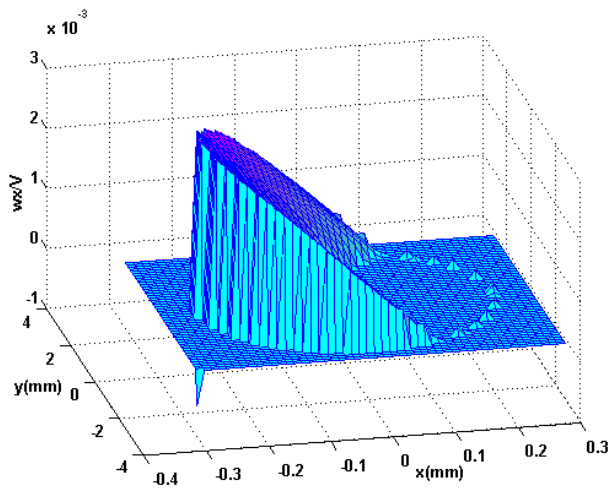


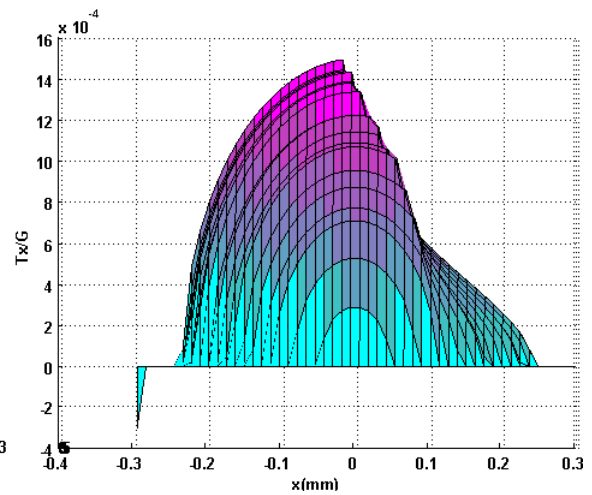
Fig. 5. Formes de la zone de contact données par l'approche exacte dans le cas où le rayon de bombé du galet vaut 500 mm ($M_x \times M_y = 50 \times 50$, $N_y = 70$).



(a)



(b)



(c)

Fig. 6. Résultats de l'approche exacte dans le cas du roulement stationnaire : (a) forme de la zone de contact (avec ou sans respect des proportions), (b) vitesse de glissement w_x , (c) densité surfacique de forces tangentielles au contact τ_x .

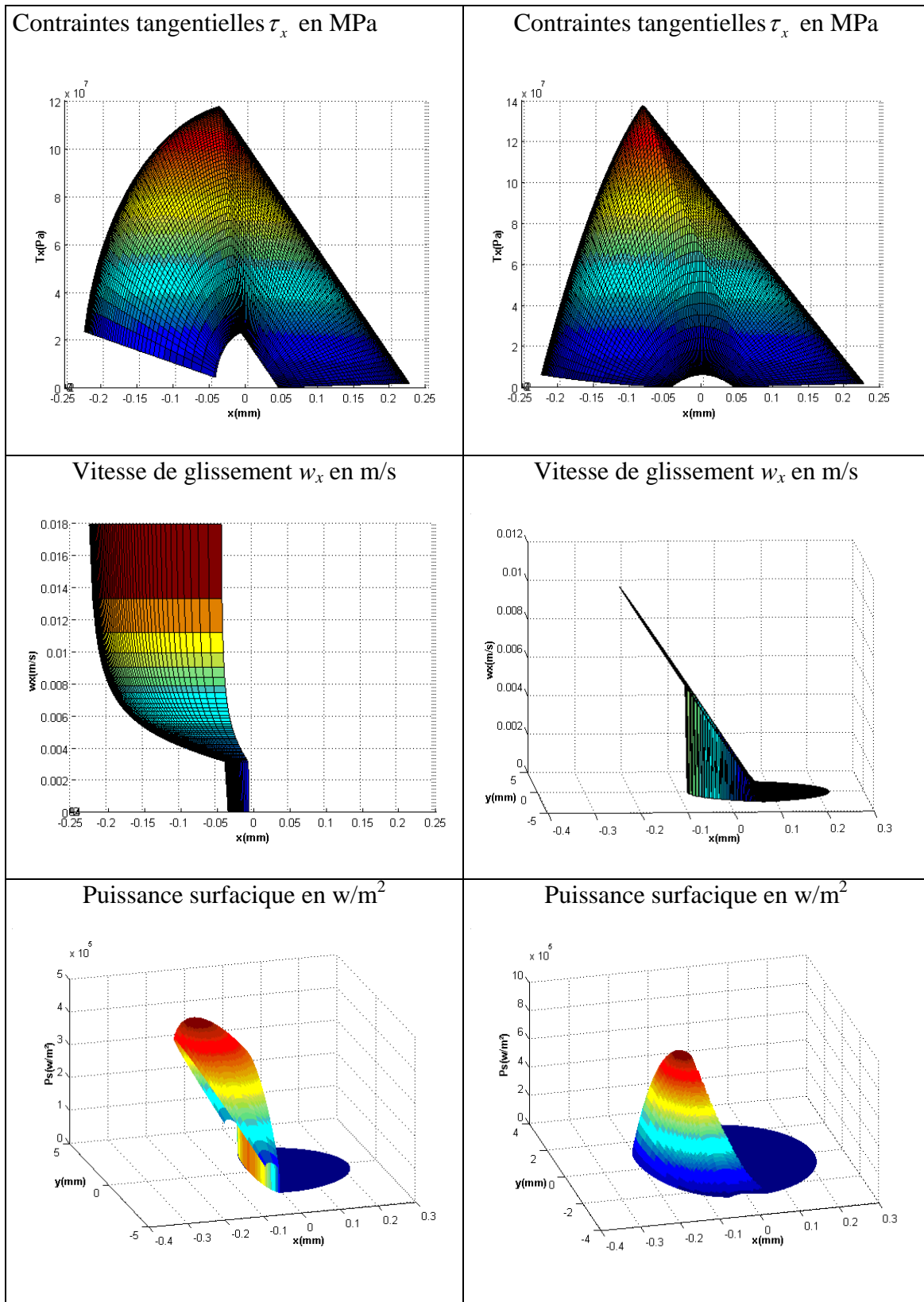


Fig. 7. Résultats de l'approche simplifiée dans le cas du roulement stationnaire. Colonne de gauche : répartition elliptique de pression, colonne de droite : répartition parabolique de pression.

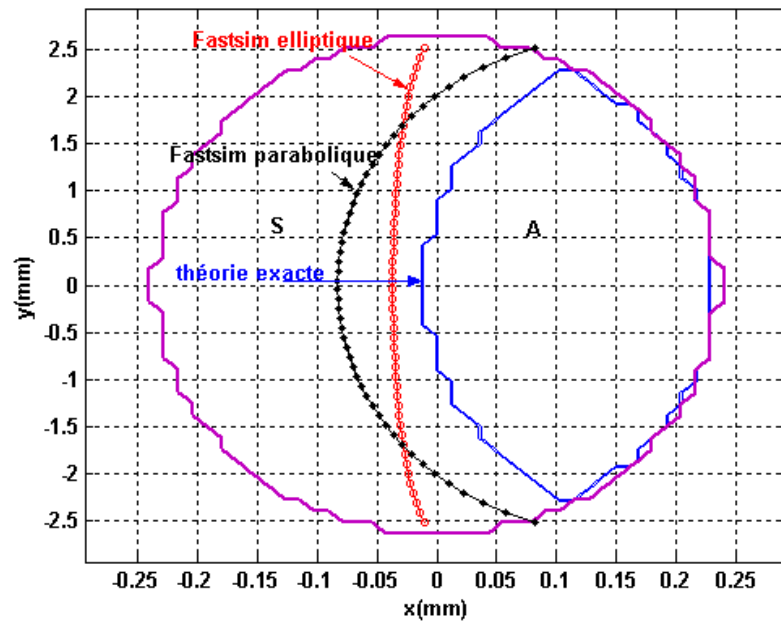


Fig. 8. Comparaison de la partition glissement (S) / adhérence (A) de l'aire de contact par les trois approches. L'approche simplifiée surestime la zone d'adhérence quelle que soit la répartition de pression retenue.

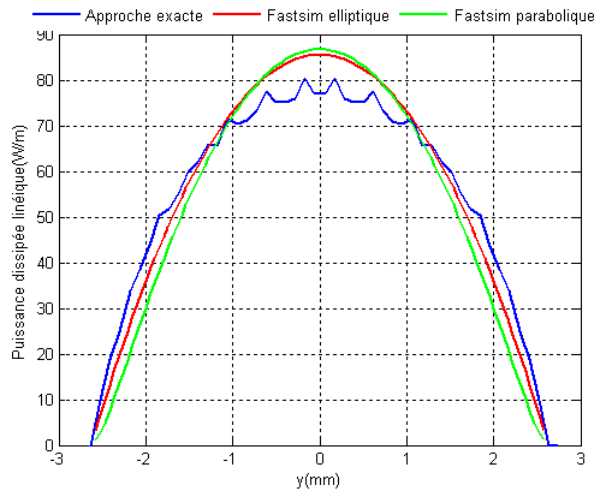


Fig. 9. Distribution de la puissance dissipée linéique par l'approche exacte (calculée avec 100 points pour la description du profil et une discrétisation de 50 x 50) et par l'approche simplifiée dans le cas elliptique (FASTSIM elliptique) et dans le cas parabolique (FASTSIM parabolique)

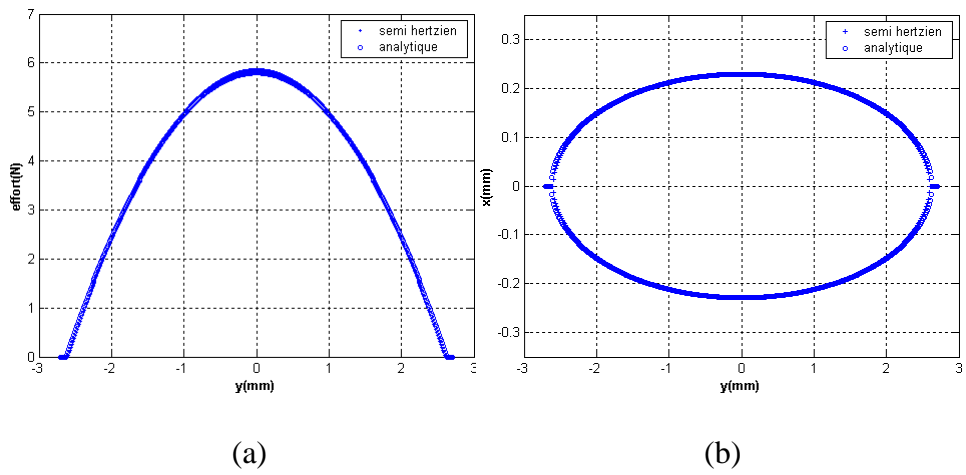


Fig. 10. Comparaison entre l'approche semi hertzienne et la solution de Hertz sur un contact à courbures constantes: (a) distribution des efforts par bande, (b) forme de la zone de contact.

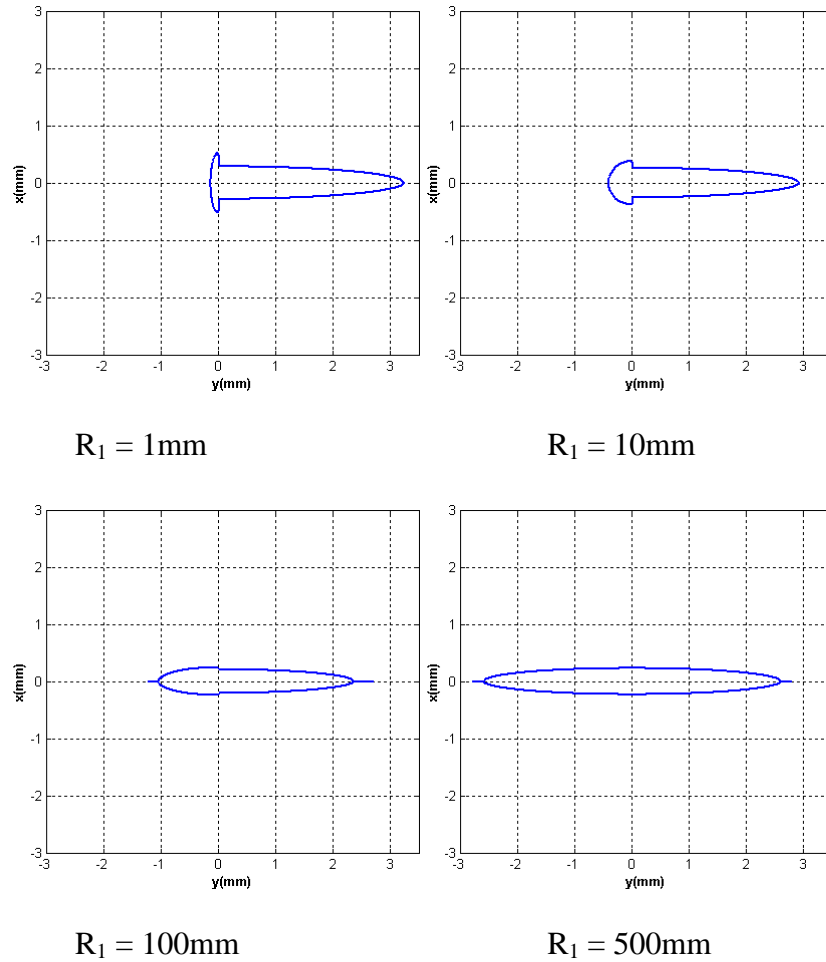
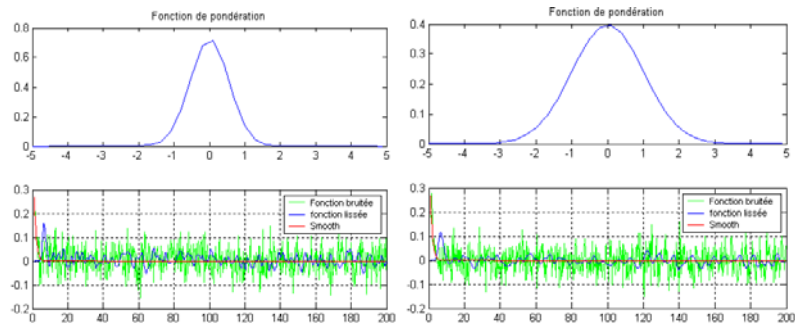
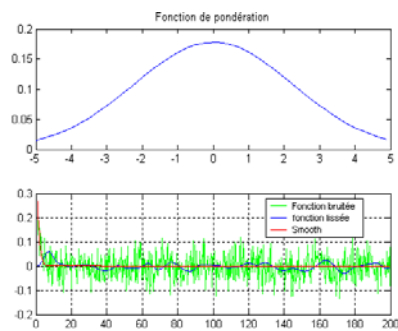


Fig. 11. Formes de la zone de contact données par l'approche semi hertzienne pour des rayons de raccordement allant de 1 à 500 mm : avec l'accroissement de ces derniers, les pointes s'estompent peu à peu et on retrouve finalement l'ellipse de Hertz avec le bon élargissement.



(a) $C = 0,3$

(b) $C = 1$



(c) $C = 5$

Fig. 12. Influence des paramètres de la fonction de pondération sur la qualité de lissage : le cas (c) est plus lissé que les cas (a) et (b).

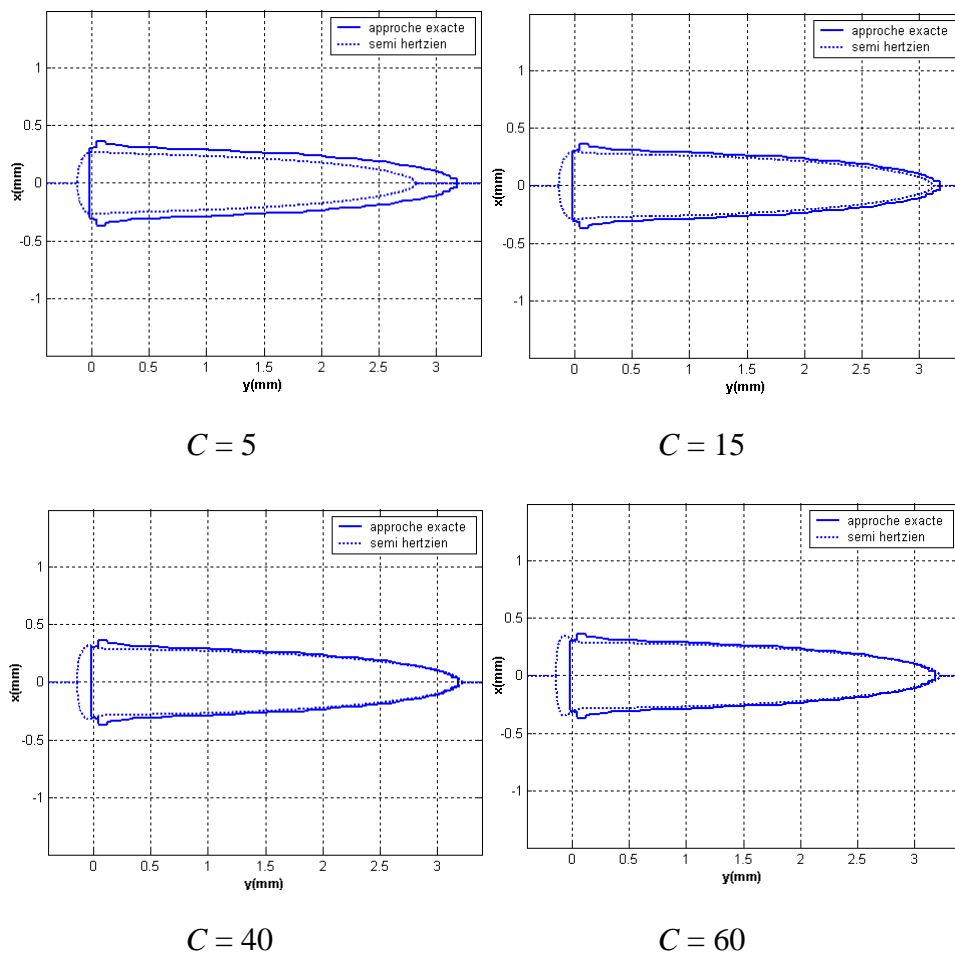
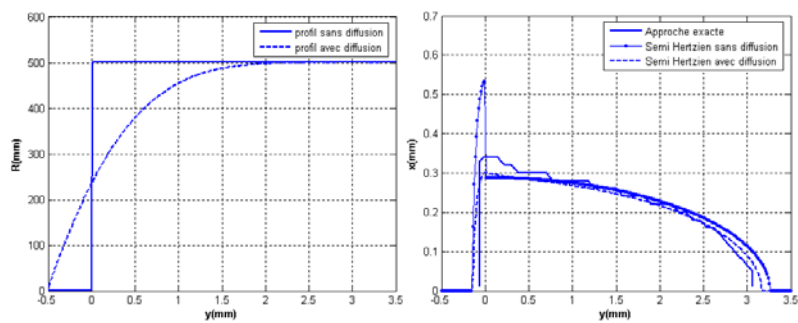


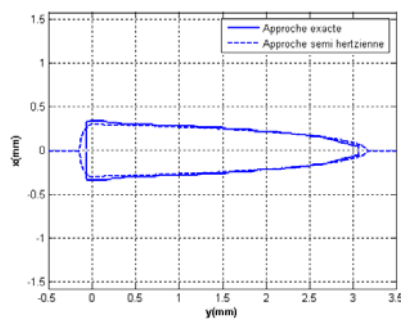
Fig. 13. Forme de la zone de contact en fonction du paramètre de diffusion C dans le cas où le

$$\text{rapport } \frac{R_1}{R_2} = 0,002.$$



(a)

(b)



(c)

Fig. 14. Résultat de la diffusion avec le paramètre optimal C^* : (a) variations des courbures du galet dans le plan (yOz) avant et après diffusion, (b) forme de la zone de contact: confrontation des trois approches, (c) bonne approximation de la méthode semi hertzienne avec diffusion.

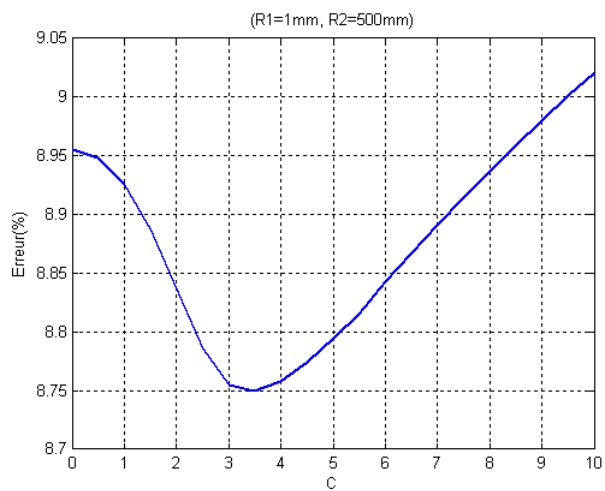


Fig. 15. Variation de l'erreur en fonction de C dans le cas $R_2 = 500$ mm et $R_1 = 1$ mm: la fonction erreur est convexe et le minimum est atteint au point de coordonnées (3,5 ; 8,75).

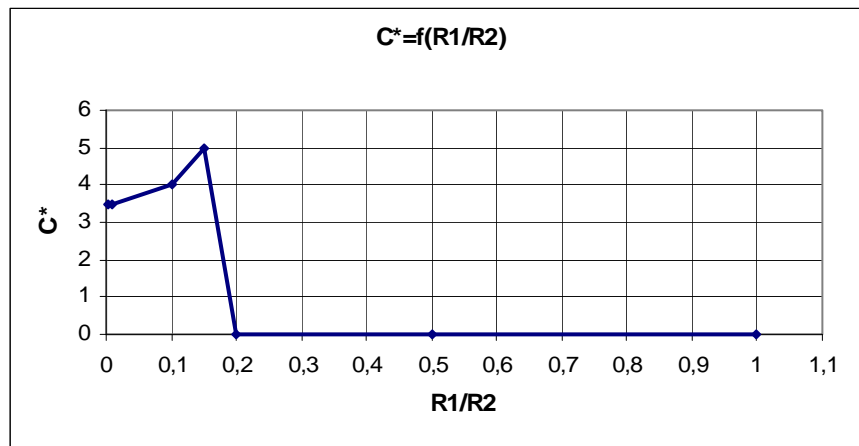
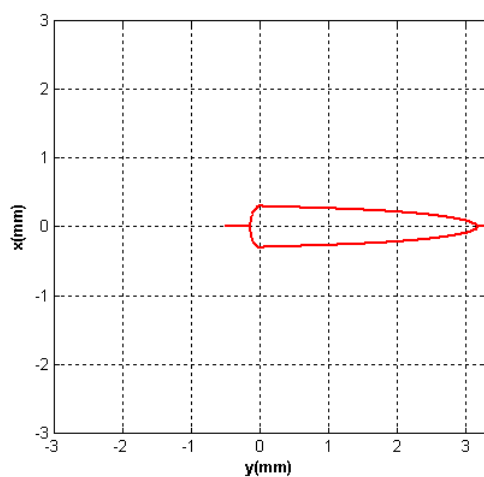
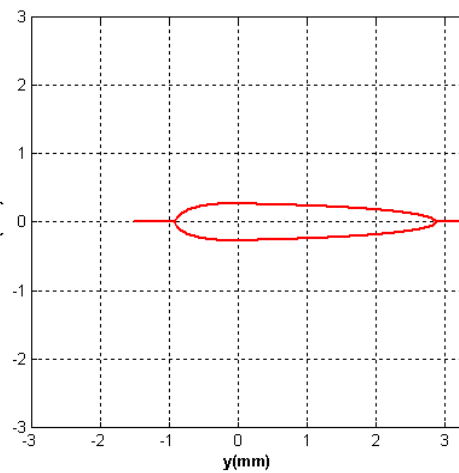


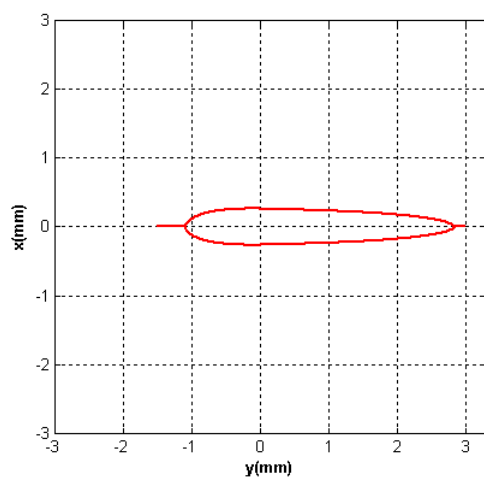
Fig. 16. Evolution du paramètre de diffusion pour des rayons de raccordement quelconques allant de 1 à 100 mm dans le cas où $R_2 = 500$ mm.



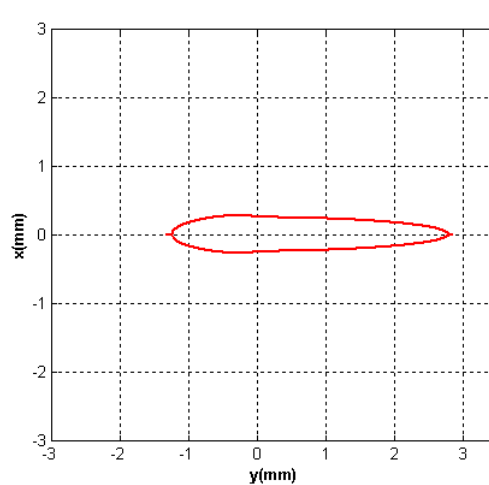
$C^* = 3.5$ (erreur = 8.75%)



$C^* = 4$ (erreur = 4.36%)



$C^* = 5$ (erreur = 3.82%)



$C^* = 0$ (erreur = 1%)

Fig. 17. Formes de la zone de contact par la méthode semi hertzienne avec diffusion pour des rayons de raccordement valant respectivement 1, 50, 75 et 500 mm .