



# Modélisation probabiliste, identification et propagation des incertitudes dans les modèles numériques des systèmes mécaniques complexes

Christian Soize

► **To cite this version:**

Christian Soize. Modélisation probabiliste, identification et propagation des incertitudes dans les modèles numériques des systèmes mécaniques complexes. (Plenary Lecture) 9ème Colloque National en Calcul des Structures (CSMA), May 2009, Giens (Var), France. pp.1-12. hal-00773371

**HAL Id: hal-00773371**

**<https://hal-upec-upem.archives-ouvertes.fr/hal-00773371>**

Submitted on 13 Jan 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Modélisation probabiliste, identification et propagation des incertitudes dans les modèles numériques des systèmes mécaniques complexes

C. Soize

Université Paris-Est  
Laboratoire Modélisation et Simulation Multi-Echelle  
5 Bd Descartes, 77454 Marne-la-Vallée, France  
christian.soize@univ-Paris-Est.fr

---

**Résumé** – On introduit les différents types d’incertitudes, la variabilité des systèmes réels, les types d’approche probabiliste pour modéliser les incertitudes, les types de représentation pour les modèles probabilistes des incertitudes, la construction des modèles probabilistes en utilisant le principe du maximum d’entropie. Puis on développe l’approche probabiliste non paramétrique des incertitudes pour les problèmes elliptiques, pour l’élastodynamique 3D avec non-linéarités géométriques et pour la vibroacoustique BF et MF avec validations expérimentales.

**Mots clés** – Incertitudes, probabilité, modélisation probabiliste, propagation, identification.

---

## 1 Introduction sur les modélisations probabilistes des incertitudes

**Incertaines et variabilité.** Le *système conceptuel* ou encore système sur plan, est le système qui sert à construire le *système réel* à l’aide d’un processus de fabrication mais qui sert aussi à construire le modèle numérique nominale encore appelé le *modèle moyen* dont l’objectif est de prévoir les réponses du système réel dans son environnement. Le système réel placé dans un environnement fixé peut présenter une variabilité des réponses liée par exemple à des variations du processus de fabrication, à des petites variations de configuration, etc. Le modèle moyen qui résulte d’un processus de modélisation mathématique-mécanique du système conceptuel présente des paramètres qui peuvent être incertains et on parle alors des *incertitudes sur les paramètres du modèle*. Le processus de modélisation induit aussi des erreurs de modélisation qui apparaissent alors comme des *incertitudes de modélisation*. Il est important de prendre en compte ces deux types d’incertitudes pour améliorer la qualité des prévisions d’un modèle et de pouvoir ainsi utiliser le modèle pour optimiser la conception vis-à-vis de critères fixés. Il est admis aujourd’hui que, dès que la théorie des probabilités peut être utilisée pour prendre en compte les incertitudes, alors cette dernière est la plus efficace et la plus complète et c’est l’approche que nous retenons dans ce papier.

**Types d’approche probabiliste pour modéliser les incertitudes.** L’*approche probabiliste paramétrique* consiste à modéliser les paramètres incertains du modèle moyen par des variables aléatoires puis à construire explicitement le modèle probabiliste de ces variables aléatoires à l’aide de l’information disponible. Cette approche est la plus adaptée et la plus efficace pour prendre en compte les incertitudes sur les paramètres du modèle dès lors que la théorie des probabilités peut être utilisée. De très nombreux travaux ont été publiés en ce domaine et un aperçu de l’état de l’art peut être appréciée au travers des travaux récentes (voir par exemple [16,34,46,47]). Par contre l’approche paramétrique ne permet pas de prendre en compte les incertitudes de modélisation (voir par exemple [4,51, 56]). Une solution possible pour résoudre ce problème difficile de prise en compte des incertitudes de modélisation a été proposée dans [51,52] sous le libellé *approche probabiliste non paramétrique* avec des extensions et développements de la théorie présentées dans [53-56]. Cette approche consiste à remplacer les matrices des approximations finies des opérateurs

du modèle moyen par des matrices aléatoires dont les moyennes sont les matrices du modèle moyen et pour lesquelles le modèle probabiliste doit être construit à l'aide de l'information disponible. Cette approche utilise la théorie des matrices aléatoires (voir par exemple [36]) et a nécessité le développement de nouveaux ensembles de matrices aléatoires [51,52,55,37] construits à l'aide du principe du maximum d'entropie (voir ci-dessous). Cette approche a été appliquée et validée, pour des problèmes directs de prévision, des problèmes stochastiques inverses d'identification et des problèmes d'optimisation robuste [2,3,8-11,13,14,20,22,44,53-56,64,65] pour de nombreuses situations, souvent avec des validations expérimentales, et des extensions ont été proposées, en particulier en sous-structuration dynamique et en dynamique non linéaire [3,6,7,12,17,21,38,39,45,61].

**Types de représentation des modèles probabilistes des incertitudes.** Une question fondamentale est la construction du modèle probabiliste *a priori* des incertitudes. Ce modèle *a priori* peut ensuite être utilisé pour étudier la propagation des incertitudes dans le système incertain analysé. Si des mesures expérimentales sur des observations du système sont disponibles, alors ces mesures peuvent être utilisées pour identifier les paramètres du modèle probabiliste ainsi construit (voir par exemple [65]) en utilisant par exemple la méthode du maximum de vraisemblance [48,66] ou encore en construisant le modèle probabiliste *a posteriori* (voir par exemple [4]) en utilisant la méthode de Bayes (voir par exemple [31,66]). Pour la construction du modèle probabiliste *a priori* d'une variable aléatoire vectorielle  $\mathbf{A}$  appartenant à l'ensemble  $\mathcal{L}_N^2$  de toutes les variables aléatoires définies sur un espace probabilisé, à valeurs dans  $\mathbb{R}^N$  et du second ordre (variable aléatoire qui peut résulter d'une approximation de dimension finie d'un processus ou d'un champ stochastique) deux méthodes peuvent être utilisées.

(i)- La première est une approche directe qui consiste à construire directement sa loi de probabilité  $P_{\mathbf{A}}(d\mathbf{a})$  sur  $\mathbb{R}^N$  en utilisant par exemple le principe du Maximum d'Entropie (ce point est développé dans le paragraphe suivant).

(ii)- La seconde est une approche indirecte qui consiste à introduire une représentation  $\mathbf{A} = \mathbf{g}(\mathbf{X})$  pour laquelle  $\mathbf{A} \in \mathcal{L}_N^2$  résulte d'une transformation par une application non linéaire déterministe  $\mathbf{g}$  (qu'il faut construire) d'une variable aléatoire vectorielle  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_\nu)$  à valeurs  $\mathbb{R}^\nu$  dont la loi de probabilité  $P_{\mathbf{X}}(d\mathbf{x})$  est donnée et donc est connue. Alors  $P_{\mathbf{A}}$  résulte de la transformation de  $P_{\mathbf{X}}$  par l'application  $\mathbf{g}$ . On peut distinguer deux grands types de méthode.

(ii.1)- La première est liée aux méthodes spectrales telles que les Chaos polynômiaux [15,25,26,32,41,42,62,63,67] qui s'appliquent aussi en dimension infinie pour les processus et les champs stochastiques, qui permettent d'avoir un méthode constructive de  $\mathbf{g}$  et qui permettent d'écrire pour toute variable aléatoire  $\mathbf{A}$  dans  $\mathcal{L}_N^2$ , la représentation

$$\mathbf{A} = \sum_{j_1=0}^{+\infty} \dots \sum_{j_\nu=0}^{+\infty} \mathbf{a}^{j_1, \dots, j_\nu} \psi_{j_1}(X_1) \times \dots \times \psi_{j_\nu}(X_\nu) \quad ,$$

où les  $\psi_j$  sont des polynômes réels connus et  $\mathbf{a}^{j_1, \dots, j_\nu}$  sont des vecteurs dans  $\mathbb{R}^N$  qui définissent complètement  $\mathbf{g}$ . Ainsi la construction de  $\mathbf{g}$  consiste à identifier les coefficients vectoriels  $\mathbf{a}^{j_1, \dots, j_\nu}$ . Si  $\mathbf{X}$  est Gaussien alors les polynômes sont les polynômes d'Hermite normalisés et on a les chaos Gaussiens. On peut trouver aujourd'hui de nombreuses applications de cette approche (pour des problèmes directs et inverses, voir par exemple [1,5,18,19,23,27,28,33]).

(ii.2)- La seconde consiste à construire *a priori* une représentation algébrique  $\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{X}, \mathbf{w})$  ayant un paramétrage de dimension minimal  $\mathbf{w}$ , où  $\mathbf{X}$  est une variable aléatoire vectorielle donnée de loi  $P_{\mathbf{X}}$ , où  $\tilde{\mathbf{g}}$  est une application non linéaire explicitement donnée et où le paramètre vectoriel  $\mathbf{w}$  doit être identifié. On pourra par exemple trouver des représentations de champs stochastiques à valeurs tensorielles basées sur cette approche dans [57,58].

Si la méthode (ii.1) permet de représenter n'importe quel vecteur aléatoire  $\mathbf{A}$  dans  $\mathcal{L}_N^2$  (mais la représentation peut alors nécessiter un très grand nombre de coefficients, ce qui peut conduire à des problèmes insurmontables d'identification), la méthode (ii.2) ne permet pas en général de représenter n'importe quel vecteur aléatoire  $\mathbf{A}$  dans  $\mathcal{L}_N^2$  mais dans un sous-ensemble de  $\mathcal{L}_N^2$  lorsque  $\mathbf{w}$  parcourt tout l'espace admissible (par contre l'identification de  $\mathbf{w}$  est en général faisable, par construction).

**Construction des modèles probabilistes en utilisant le principe du maximum d'entropie.** La mesure du niveau d'incertitudes par l'entropie a été introduite par Shannon en 1948 [49] dans

le cadre de la théorie de l'information. Le principe du maximum d'entropie (c'est-à-dire de la maximisation du niveau d'incertitude) pour construire un modèle probabiliste *a priori* d'une grandeur aléatoire sous la contrainte définie par l'information disponible, a été formalisé par Jaynes en 1957 [30]. Ce principe apparaît comme un outil majeur pour construire le modèle probabiliste *a priori* des incertitudes sur les paramètres du modèle moyen et pour l'approche probabiliste non paramétrique des incertitudes de modélisation. Soit  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_N)$  un vecteur réel et soit  $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_N)$  une variable aléatoire du second ordre à valeurs dans  $\mathbb{R}^N$  dont la loi de probabilité est donnée par une densité de probabilité  $\mathbf{a} \mapsto p_{\mathbf{A}}(\mathbf{a})$  sur  $\mathbb{R}^N$  par rapport à  $d\mathbf{a} = da_1 \dots da_N$  et qui vérifie la condition de normalisation  $\int_{\mathbb{R}^N} p_{\mathbf{A}}(\mathbf{a}) d\mathbf{a} = 1$ . En fait on suppose que  $\mathbf{A}$  est à valeurs dans une partie quelconque  $\mathcal{A}$  de  $\mathbb{R}^N$  ce qui implique que le support de la fonction  $p_{\mathbf{A}}$  est  $\mathcal{A}$ . L'information disponible est représentée par l'équation vectorielle suivante sur  $\mathbb{R}^\mu$ , définissant les contraintes,  $E\{\mathbf{g}(\mathbf{A})\} = \mathbf{f}$  avec  $E$  l'espérance mathématique,  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_\mu)$  un vecteur donné dans  $\mathbb{R}^\mu$  et où  $\mathbf{a} \mapsto \mathbf{g}(\mathbf{a}) = (g_1(\mathbf{a}), \dots, g_\mu(\mathbf{a}))$  est une fonction donnée de  $\mathbb{R}^N$  dans  $\mathbb{R}^\mu$ . Soit  $\mathcal{C}$  l'ensemble de toutes les densités de probabilité  $\mathbf{a} \mapsto p_{\mathbf{A}}(\mathbf{a})$  définies sur  $\mathbb{R}^N$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$  vérifiant la condition de normalisation et l'équation des contraintes  $E\{\mathbf{g}(\mathbf{A})\} = \mathbf{f}$ . Le principe du maximum d'entropie consiste à trouver  $p_{\mathbf{A}}$  dans  $\mathcal{C}$  qui maximise l'incertitude,

$$p_{\mathbf{A}} = \arg \max_{p \in \mathcal{C}} S(p) \quad , \quad S(p) = - \int_{\mathbb{R}^N} p(\mathbf{a}) \log(p(\mathbf{a})) d\mathbf{a}$$

avec  $S(p)$  l'entropie de la densité de probabilité  $p$ . En introduisant le multiplicateur de Lagrange  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{L}_\mu \subset \mathbb{R}^\mu$  associé à la contrainte où  $\mathcal{L}_\mu$  est le sous-ensemble de  $\mathbb{R}^\mu$  de toutes les valeurs admissibles de  $\boldsymbol{\lambda}$ , il est facile de vérifier que la solution du problème d'optimisation s'écrit

$$p_{\mathbf{A}}(\mathbf{a}) = c_0 \mathbb{1}_{\mathcal{A}}(\mathbf{a}) \exp(- \langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{g}(\mathbf{a}) \rangle) \quad , \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^N$$

où  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_\mu y_\mu$  et où  $\mathbb{1}_{\mathcal{A}}$  est la fonction indicatrice de l'ensemble  $\mathcal{A}$ . La constante de normalisation  $c_0$  et le multiplicateur de Lagrange  $\boldsymbol{\lambda}$  sont calculés en résolvant une équation algébrique non linéaire vectorielle déduite de la condition de normalisation et de l'équation des contraintes. Cette équation algébrique non linéaire vectorielle peut être résolue avec des algorithmes appropriés. Ensuite, il est nécessaire de construire un générateur de réalisations indépendantes de la variable aléatoire  $\mathbf{A}$  dont la densité de probabilité est celle qui a été construite. En petite dimension (N quelques unités), il n'y a pas de difficulté. En grande dimension (N plusieurs centaines voire plusieurs milliers), il y a deux grandes difficultés. La première est liée au calcul d'intégrale en grande dimension du type  $c_0 \int_{\mathcal{A}} \mathbf{g}(\mathbf{a}) \exp(- \langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{g}(\mathbf{a}) \rangle) d\mathbf{a}$  nécessaire pour mettre en oeuvre l'algorithme de calcul de  $c_0$  et  $\boldsymbol{\lambda}$ . La seconde est la construction du générateur une fois que  $c_0$  et  $\boldsymbol{\lambda}$  ont été calculés. Ces deux aspects peuvent être résolus en utilisant la méthode de Monte Carlo pour les chaînes de Markov (MCCM) (voir par exemple [31,35,66]). Le noyau de transition de la chaîne de Markov homogène de la méthode MCCM peut être construit en utilisant l'algorithme de Metropolis-Hastings [29] ou de Gibbs [24] qui est un algorithme légèrement différent pour lequel le noyau est directement déduit de la densité de probabilité de transition et pour lequel les tirages de Gibbs sont toujours acceptés. Ces deux algorithmes construisent le noyau de transition pour lequel la mesure invariante est  $p_{\mathbf{A}}$ . En général, ces algorithmes sont efficaces, mais peuvent aussi ne pas l'être lorsque qu'il existe des régions d'attraction qui ne correspondent pas à la mesure invariante. Ces situations ne peuvent pas être facilement détectées et sont consommatrices de temps calcul. Récemment, une nouvelle approche [59] de la classe de la méthode de Gibbs a été proposée pour éviter ces difficultés et est basée sur l'introduction d'une équation différentielle stochastique d'Itô dont l'unique mesure invariante est  $p_{\mathbf{A}}$  et est la solution explicite d'une équation de Fokker-Planck [50]. L'algorithme est alors obtenu par discrétisation de l'équation d'Itô.

## 2 Approche probabiliste non paramétrique des incertitudes pour les problèmes elliptiques

Nous présentons ci-dessous une synthèse de l'extension de l'approche probabiliste non paramétrique des incertitudes pour le cas général des problèmes aux limites elliptiques, récemment introduite dans [60]. On considère le modèle numérique moyen suivant résultant de la discrétisation par éléments finis d'un problème aux limites strictement elliptique :  $[\underline{\mathbb{K}}][\underline{x}] = [b]$  avec  $[\underline{\mathbb{K}}]$  une

matrice sparse réelle  $(n \times n)$  définie positive,  $[x]$  la matrice réelle  $(n \times m)$  des inconnues et  $[b]$  la matrice réelle  $(n \times m)$  dont les colonnes sont les vecteurs d'une base algébrique générant un sous espace vectoriel de dimension  $m$  de  $\mathbb{R}^n$  et qui est relative aux chargements du système. L'approche probabiliste non paramétrique des incertitudes ne peut être utilisée directement, d'une part à cause de la présence des zéros topologiques dans la matrice sparse  $[\underline{K}]$  et d'autre part parce que pour les problèmes en grande dimension une matrice aléatoire pleine ne pourrait être gérée (si  $n = 10^7$ , alors il y a  $0.5 \times 10^{14}$  éléments non nuls !). Il est donc nécessaire de construire une réduction de modèle de dimension  $N \ll n$  sachant qu'une réduction de type modale ne serait pas efficace vis-à-vis de la convergence en  $N$ . L'approche proposée dans [60] consiste à associer au modèle numérique moyen le système stochastique  $[\underline{K}][\mathbf{X}] = [b]$  où  $\{[\underline{K}^N], N = 1, \dots, n\}$  est une famille de matrices aléatoires  $(n \times n)$  appartenant à l'ensemble  $SE^+$  défini dans [55] telle que la solution aléatoire  $[\mathbf{X}^N]$  de l'équation stochastique  $[\underline{K}^N][\mathbf{X}^N] = [b]$  admette une solution du second ordre  $E\{\|[\mathbf{X}^N]\|_F^2\} = c < +\infty$  qui soit telle que  $\lim_{N \rightarrow n} E\{\|[\mathbf{X}^N] - [\mathbf{X}]\|_F^2\} = 0$ , où  $N \leq n$  est la dimension du modèle réduit. Pour  $N$  fixé, la matrice aléatoire  $\{[\underline{K}^N]\}$  est définie par  $[\underline{K}^N] = \{[\Phi^N]([\underline{K}_N]^{-1} - [\underline{K}_N]^{-1})[\Phi^N]^T + [\underline{K}]^{-1}\}^{-1}$  avec  $[\Phi^N]$  la matrice réelle  $(n \times N)$  dont les colonnes sont les  $N$  vecteurs propres orthonormés de  $[\underline{K}]$  associés aux  $N$  premières valeurs propres positives  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$ . La matrice diagonale  $[\underline{K}_N]$  des valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  s'écrit  $[\underline{K}_N] = [\underline{L}_N]^T [\underline{L}_N]$  et la matrice aléatoire pleine  $[\underline{K}_N]$  est telle que  $[\underline{K}_N] = [\underline{L}_N]^T [\underline{G}_N] [\underline{L}_N]$  avec  $[\underline{G}_N]$  la matrice aléatoire pleine de dimension  $(N \times N)$  appartenant à l'ensemble  $SG^+$  défini dans [55]. On a donc  $E\{[\underline{K}_N]\} = [\underline{K}_N]$ . Évidemment, la matrice aléatoire  $(n \times n)$  pleine  $[\underline{K}_N]$  n'est jamais assemblée et on utilise l'algorithme spécifique décrit dans [60] dans lequel les propriétés mathématiques sont aussi étudiées.

A titre d'exemple, on considère le problème suivant d'élastostatique linéaire. Le maillage par éléments finis du domaine est montré à la Figure 1 (gauche) et il y a 17 355 DDL. Le matériau est élastique linéaire homogène et isotrope. Il y a des conditions de Dirichlet sur une partie du bord et il y a  $m = 4$  chargements statiques indépendants appliqués sur la surface latérale extérieure du cylindre. Le niveau d'incertitudes est défini par la valeur du paramètre de dispersion  $\delta$  de la matrice aléatoire  $[\underline{G}_N]$ . Le solver stochastique est la méthode de Monte Carlo pour laquelle  $n_s = 20000$  réalisations indépendante sont utilisées. La Figure 1 (droite) montre la convergence en moyenne d'ordre deux de la solution stochastique en fonction de la dimension  $N$  de la réduction pour  $\delta = 0.5$ . La convergence est obtenue pour  $N \geq 300$

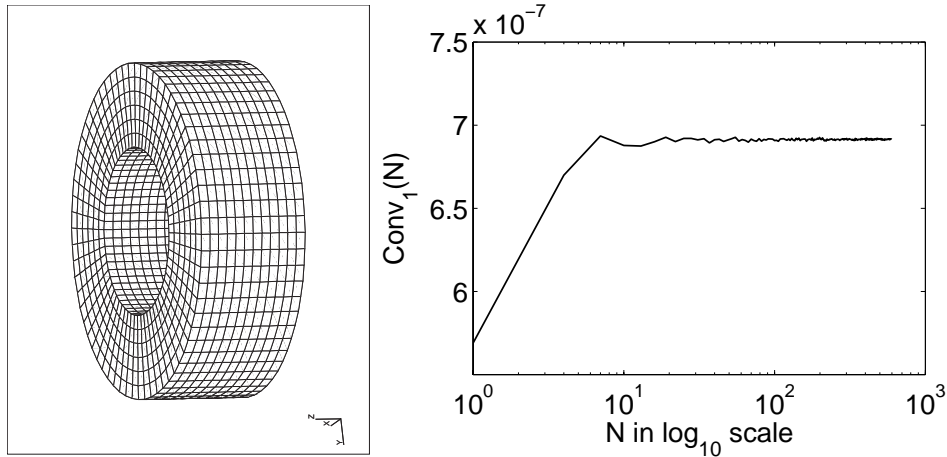


Figure 1 (**Gauche**) : maillage du domaine par éléments finis. (**Droite**) : convergence en moyenne d'ordre deux par rapport à  $N$ .

Soit  $U$  (resp.  $V$ ) la variable aléatoire représentant la composante de la réponse aléatoire pour laquelle la valeur moyenne (resp. l'écart type) est la plus grande. Soit  $F_U(u) = \text{Proba}\{U \leq u\}$  (resp.  $F_V(v)$ ) la fonction de répartition de  $U$  (resp  $V$ ). Les Figures 2 (gauche) et (droite) montrent, pour  $n_s = 20000$  et  $N = 500$  les graphes des fonctions  $u \mapsto \log_{10} F_U(u)$  et  $v \mapsto \log_{10} F_V(v)$  pour

différentes valeurs de  $\delta$ .

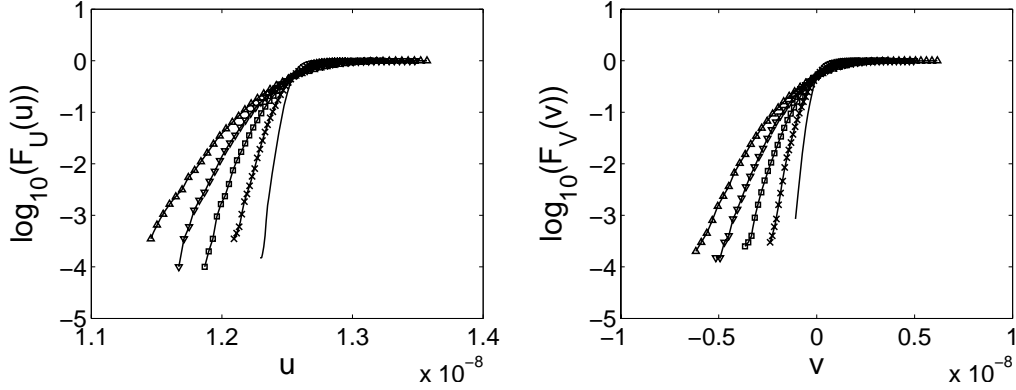


Figure 2 (**Gauche**) : graphe de  $u \mapsto \log_{10} F_U(u)$ , (**droite**) : graphe de  $v \mapsto \log_{10} F_V(v)$ , pour  $\delta = 0.1$  (sans symbol),  $\delta = 0.2$  (x),  $\delta = 0.3$  (carré),  $\delta = 0.4$  (triangle bas),  $\delta = 0.5$  (triangle haut).

### 3 Approche probabiliste non paramétrique des incertitudes en élastodynamique 3D avec non-linéarités géométriques

Nous présentons ci-dessous une synthèse de l'extension récemment introduite dans [39] relative à l'approche probabiliste non paramétrique des incertitudes pour le cas général de l'élastodynamique 3D en grands déplacements mais avec des matériaux à comportement linéaire, c'est-à-dire, en présence de non-linéarités géométriques. La première étape consiste à introduire le modèle moyen réduit du système dynamique non linéaire. Le champ de déplacement  $\{\mathbf{u}(x, y, z, t), (x, y, z) \in \Omega\}$  est écrit  $\mathbf{u}(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^n q_i(t) \varphi_i(x, y, z)$  avec  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  une base adaptée (modes élastiques du système linéarisé, modes POD du système non linéaire, etc). Dans ces conditions, le vecteur  $\mathbf{q}(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t))$  des coordonnées généralisées vérifie l'équation dynamique non linéaire (modèle moyen réduit),  $[\mathbf{M}_n] \ddot{\mathbf{q}}(t) + [\mathbf{D}_n] \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{k}_{NL}(\mathbf{q}(t)) = \mathbf{F}(t)$  avec  $\mathbf{k}_{NL}(\mathbf{q})$  les forces élastiques généralisées  $\{\mathbf{k}_{NL}(\mathbf{q})\}_i = \sum_{j=1}^n [\mathbf{K}^{(1)}]_{ij} q_j + \sum_{j,\ell=1}^n \mathbf{K}_{ij\ell}^{(2)} q_j q_\ell + \sum_{j,\ell,p=1}^n \mathbf{K}_{ij\ell p}^{(3)} q_j q_\ell q_p$ . On introduit le vecteur des contraintes  $\mathbf{s}(t)$  qui s'écrit  $\mathbf{s}(t) = \mathbf{s}^0 + \sum_{i=1}^n \mathbf{s}_i^{(1)} q_i(t) + \sum_{i,j=1}^n [\mathbf{S}^{(2)}]_{ij} q_i(t) q_j(t)$ . Le calcul des coefficients du modèle réduit moyen est mené en utilisant la procédure développée dans [40,39] qui est valable pour le cas général de la dynamique non linéaire en grand déplacements et qui n'utilise qu'un logiciel quelconque du commerce faisant des analyses statiques en grands déplacements. Pour analyser les propriétés algébriques de la raideur non linéaire, le tenseur  $\mathbf{K}_{ij\ell}^{(2)}$  est réécrit  $\mathbf{K}_{ij\ell}^{(2)} = \frac{1}{2}(\widehat{\mathbf{K}}_{ij\ell}^{(2)} + \widehat{\mathbf{K}}_{\ell ij}^{(2)} + \widehat{\mathbf{K}}_{j\ell i}^{(2)})$  dans lequel le tenseur  $\widehat{\mathbf{K}}_{ij\ell}^{(2)}$  est parfaitement défini. Le tenseur  $\widehat{\mathbf{K}}_{ij\ell}^{(2)}$  est réécrit (reshaped) à l'aide d'une matrice  $(n \times n^2)$  et le tenseur  $\mathbf{K}_{ij\ell p}^{(3)}$  à l'aide d'une matrice  $(n^2 \times n^2)$  tels que  $[\widetilde{\mathbf{K}}^{(2)}]_{iJ} = \widehat{\mathbf{K}}_{ij\ell}^{(2)}$  et  $[\widetilde{\mathbf{K}}^{(3)}]_{IJ} = \mathbf{K}_{ij\ell p}^{(3)}$  pour  $I = j + n(i-1)$  et  $J = p + n(\ell-1)$ . On démontre alors que la matrice  $[\mathbf{K}_B]$  de dimension  $(\nu \times \nu)$  avec  $\nu = n + n^2$  telle que

$$[\mathbf{K}_B] = \begin{bmatrix} [\mathbf{K}^{(1)}] & [\widetilde{\mathbf{K}}^{(2)}] \\ [\widetilde{\mathbf{K}}^{(2)}]^T & 2[\widetilde{\mathbf{K}}^{(3)}] \end{bmatrix}$$

est symétrique définie positive. L'approche probabiliste non paramétrique des incertitudes pour ce système dynamique non linéaire conduit au modèle réduit stochastique suivant du champ de déplacement aléatoire  $\mathbf{U}(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^n Q_i(t) \varphi_i(x, y, z)$  et du vecteur aléatoire des contraintes  $\mathbf{S}(t) = \mathbf{s}^0 + \sum_{i=1}^n \mathbf{s}_i^{(1)} Q_i(t) + \sum_{i,j=1}^n [\mathbf{S}^{(2)}]_{ij} Q_i(t) Q_j(t)$  où le vecteur aléatoire  $\mathbf{Q}(t)$  des coordonnées généralisées vérifie l'équation dynamique non linéaire stochastique

$$[\mathbf{M}_n] \ddot{\mathbf{Q}}(t) + [\mathbf{D}_n] \dot{\mathbf{Q}}(t) + \mathbf{K}_{NL}(\mathbf{Q}(t)) = \mathbf{F}(t) \quad ,$$

le vecteur des forces élastiques non linéaires généralisées s'écrivant

$$\{\mathbf{K}_{NL}(\mathbf{q})\}_i = \sum_{j=1}^n [\mathbf{K}^{(1)}]_{ij} q_j + \sum_{j,\ell=1}^n \mathbf{K}_{ij\ell}^{(2)} q_j q_\ell + \sum_{j,\ell,p=1}^n \mathbf{K}_{ij\ell p}^{(3)} q_j q_\ell q_p \quad ,$$

dans lequel la matrice aléatoire  $[\mathbf{K}_B]$  s'écrit

$$[\mathbf{K}_B] = \begin{bmatrix} [\mathbf{K}^{(1)}] & [\tilde{\mathbf{K}}^{(2)}] \\ [\tilde{\mathbf{K}}^{(2)T}] & 2[\tilde{\mathbf{K}}^{(3)}] \end{bmatrix} .$$

Les matrices aléatoires  $[\mathbf{M}_n]$ ,  $[\mathbf{D}_n]$  et  $[\mathbf{K}_B]$ , dont les niveaux d'incertitudes sont contrôlés par  $\delta_M$ ,  $\delta_D$  et  $\delta_{K_B}$ , sont statistiquement indépendantes, symétriques définies positives presque sûrement, et appartiennent à l'ensemble  $SE^+$  défini dans [55]. Les matrices aléatoires  $[\mathbf{K}^{(1)}]$ ,  $[\tilde{\mathbf{K}}^{(2)}]$  et  $[\tilde{\mathbf{K}}^{(3)}]$  sont statistiquement dépendantes et sont déduites de la matrice aléatoire  $[\mathbf{K}_B]$ . Les tenseurs aléatoires  $\mathbf{K}_{ij\ell}^{(2)}$  et  $\mathbf{K}_{ij\ell p}^{(3)}$  sont statistiquement dépendants et se déduisent de  $[\tilde{\mathbf{K}}^{(2)}]$  et  $[\tilde{\mathbf{K}}^{(3)}]$ .

A titre d'exemple, on considère une poutre droite en acier, encadrée à ses deux extrémités, de longueur 0.2286 m, de largeur 0.0127 m et d'épaisseur 0.000775 m. L'excitation est une force concentrée appliquée au centre de la poutre et à un spectre plat sur la bande  $[-2000, 2000]$  Hz. La poutre est discrétisée en 40 éléments finis CBEAM de Nastran. Les modes du système linéarisé (12 modes dans le plan et 10 modes transverses) sont choisis pour que la réponse modale totale de la réponse soit convergée. On prend  $\delta_M = \delta_D = 0$  et  $\delta_{K_B}$  est choisie pour que la première fréquence propre (mode transverse) ait 4% de coefficient de variation. La Figure 3 montre les résultats pour le spectre aléatoire de la réponse transversale au milieu de la poutre du système dynamique non linéaire stochastique.

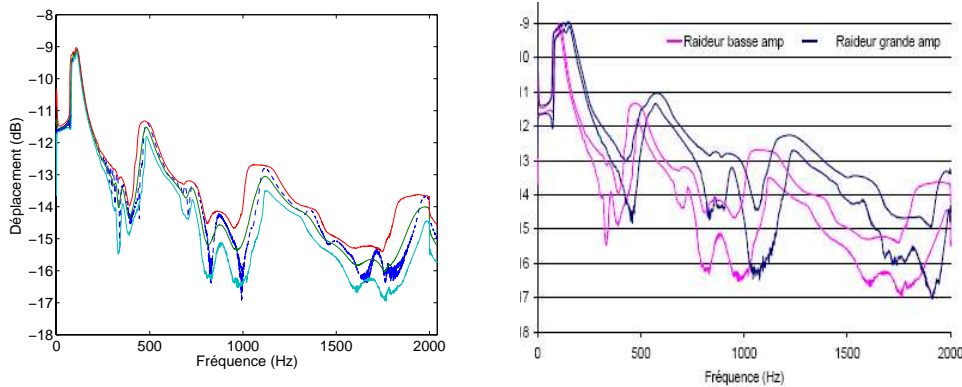


Figure 3 (**Gauche**) : modèle moyen (ligne en tirets), moyenne statistique (ligne verte), région de confiance à 95% (lignes bleu claire et rouge). (**Droite**) : région de confiance à 95% pour deux niveaux de réponse (basse amplitude (comme la figure gauche) et haute amplitude =  $2.25 \times$  basse amplitude).

## 4 Approche probabiliste non paramétrique en vibroacoustique BF et MF et validation expérimentale

Nous présentons ci-dessous une synthèse du développement présenté dans [22] relatif à l'approche probabiliste non paramétrique des incertitudes de modélisation et des incertitudes sur les paramètres du modèle moyen pour un système vibroacoustique complexe avec application à une automobile. Les incertitudes concernent la structure, la cavité acoustique et le couplage vibroacoustique sur l'interface de couplage. Les incertitudes sur le modèle de la cavité acoustique et le modèle de la structure sont identifiées expérimentalement. Une validation expérimentale globale est présentée. Un seul modèle vibroacoustique moyen est développé pour un type de voiture et plusieurs options ce qui induit une variabilité dans les comportements vibroacoustiques du système réel. L'objectif est la prévision de la pression acoustique dans l'habitacle générée par la rotation

du moteur pour les régimes [1500, 4800] tours par minute correspondant à la bande [50, 160] Hz. L'excitation est donc solidienne et est constituée de forces dynamiques appliquées aux supports du moteur. Le système vibroacoustique est constitué d'une structure viscoélastique à comportement linéaire couplée à une cavité acoustique remplie d'un fluide acoustique dissipatif. Le modèle élément fini nominal du système vibroacoustique constitue le modèle moyen. La formulation est faite dans le domaine fréquentiel  $\omega$ . Le vecteur des déplacements de la structure est  $\underline{\mathbf{u}}(\omega)$  avec  $n_s$  DDL. Le vecteur des pressions acoustiques est  $\underline{\mathbf{p}}(\omega)$  avec  $n_f$  DDL. Le modèle moyen réduit est construit par projection des équations du système couplé sur les  $N_s$  premiers modes élastiques  $\underline{\varphi}_\alpha$  de la structure dans le vide à fréquence nulle et les  $N_f$  premiers modes acoustiques  $\underline{\psi}_\beta$  de la cavité à parois rigides. Le modèle moyen réduit s'écrit alors (voir [43]),  $\underline{\mathbf{u}}(\omega) = \sum_{\alpha=1}^{N_s} \underline{q}_\alpha^s(\omega) \underline{\varphi}_\alpha$  et  $\underline{\mathbf{p}}(\omega) = \sum_{\beta=1}^{N_f} \underline{q}_\beta^f(\omega) \underline{\psi}_\beta$  avec

$$\begin{bmatrix} [\underline{A}_s(\omega)] & [\underline{C}] \\ \omega^2 [\underline{C}]^T & [\underline{A}_f(\omega)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{q}}^s(\omega) \\ \underline{\mathbf{q}}^f(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{f}}^s(\omega) \\ \underline{\mathbf{f}}^f(\omega) \end{bmatrix},$$

où  $[\underline{A}_s(\omega)] = -\omega^2 [\underline{M}_s] + i\omega [\underline{D}_s(\omega)] + [\underline{K}_s(\omega)]$  est la raideur dynamique généralisée de la structure,  $[\underline{A}_f(\omega)] = -\omega^2 [\underline{M}_f] + i\omega [\underline{D}_f] + [\underline{K}_f]$  est la raideur généralisée acoustique et  $[\underline{C}]$  est la matrice rectangulaire ( $N_s \times N_f$ ) du couplage vibroacoustique. L'approche probabiliste non paramétrique des incertitudes [51-56] conduit au modèle réduit stochastique suivant. Pour tout  $\omega$  fixé dans la bande d'analyse, la réponse stochastique est représentée par les vecteurs complexes aléatoires  $\mathbf{U}(\omega) = \sum_{\alpha=1}^{N_s} Q_\alpha^s(\omega) \underline{\varphi}_\alpha$  et  $\mathbf{P}(\omega) = \sum_{\beta=1}^{N_f} Q_\beta^f(\omega) \underline{\psi}_\beta$  tels que

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{A}_s(\omega)] & [\mathbf{C}] \\ \omega^2 [\mathbf{C}]^T & [\mathbf{A}_f(\omega)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^s(\omega) \\ \mathbf{Q}^f(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^s(\omega) \\ \mathbf{f}^f(\omega) \end{bmatrix}$$

avec  $[\mathbf{A}_s(\omega)] = -\omega^2 [\mathbf{M}_s] + i\omega [\mathbf{D}_s(\omega)] + [\mathbf{K}_s(\omega)]$ ,  $[\mathbf{A}_f(\omega)] = -\omega^2 [\mathbf{M}_f] + i\omega [\mathbf{D}_f] + [\mathbf{K}_f]$  et  $[\mathbf{C}]$  des matrices aléatoires telles que  $[\mathbf{M}_s]$ ,  $[\mathbf{D}_s(\omega)]$ ,  $[\mathbf{K}_s(\omega)]$  appartiennent à l'ensemble  $SE^+$ , où  $[\mathbf{M}_f]$  appartient à  $SE^+$  mais où  $[\mathbf{D}_f]$  et  $[\mathbf{K}_f]$  appartiennent à  $SE^{+0}$ , et finalement où  $[\mathbf{C}]$  appartient à  $SE_{inv}$ , ces trois ensembles de matrices aléatoires pleines étant définis dans [55]. La loi de probabilité est complètement définie pour chaque ensemble de matrices aléatoires et ne dépend que de la dimension de la matrice, de sa valeur moyenne (par exemple  $E\{[\mathbf{M}_s]\} = [\underline{M}_s]$ , etc) et du paramètre de dispersion qui contrôle le niveau d'incertitudes. les paramètres de dispersion sont notés  $\delta_{M_s}$ ,  $\delta_{D_s}$ ,  $\delta_{K_s}$ ,  $\delta_{M_f}$ ,  $\delta_{D_f}$ ,  $\delta_{K_f}$  et  $\delta_C$ . Le solveur stochastique est la méthode de Monte Carlo et la convergence en moyenne d'ordre deux est étudiée par rapport au nombre de réalisations et les dimensions ( $N_s$  et  $N_f$ ).

Le modèle moyen du véhicule est constitué d'un modèle éléments finis de la structure ayant 978 733 DDL de déplacement (voir Figure 4 (gauche)) et un maillage compatible sur l'interface de couplage de la cavité acoustique ayant 8139 DDL de pression (voir Figure 4 (droite)).

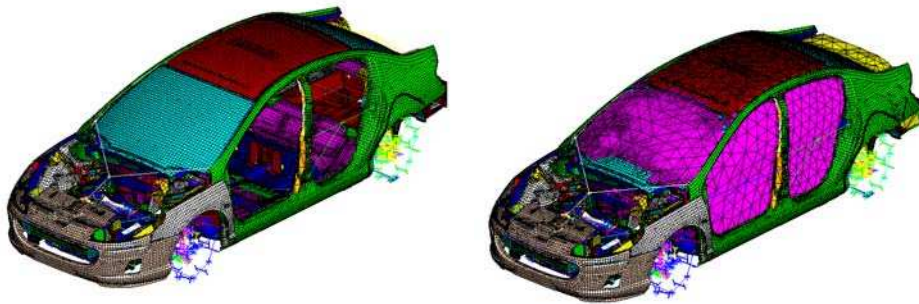


Figure 4 (**Gauche**) : modèle éléments finis de la structure. (**Droite**) : modèle éléments finis de la cavité acoustique.



Le modèle moyen réduit a 1722 modes élastiques pour la structure et 57 modes acoustiques pour la cavité. Les niveaux d'incertitudes sont représentés par  $\delta = \{\delta_{M_s}, \delta_{D_s}, \delta_{K_s}\}$  pour la structure, par  $\delta_f = \delta_{M_f} = \delta_{D_f} = \delta_{K_f}$  pour la cavité acoustique et par  $\delta_C$  pour le couplage.

Le paramètre de dispersion  $\delta_f$  est identifié expérimentalement. Les mesures sont effectuées sur  $\nu = 30$  voitures d'un même type avec différentes configurations de position des sièges, de température intérieure, du nombre de passagers, etc. Il y a  $\mu = 32$  microphones distribués dans la cavité acoustique et l'excitation et une source acoustique placée dans la cavité. On s'intéresse à l'observation aléatoire suivante

$$Z(\delta_f) = \int_B \text{dB}(\omega, \delta_f) d\omega \quad \text{avec} \quad \text{dB}(\omega, \delta_f) = 10 \log_{10} \left( p_{\text{ref}}^{-2} \frac{1}{\mu} \sum_{j=1}^{\mu} |P_j(\omega, \delta_f)|^2 \right) .$$

L'identification de  $\delta_f$  est faite par la méthode du maximum de vraisemblance :

$$\delta_f^{\text{opt}} = \arg \max_{\delta_f} \mathcal{L}(\delta_f) \quad , \quad \mathcal{L}(\delta_f) = \sum_{k=1}^{\nu} \log_{10}(p_Z(z^{\text{exp},k}, \delta_f)) \quad ,$$

où la densité de probabilité  $p_Z(z^{\text{exp},k}, \delta_f)$  est estimée avec le modèle réduit stochastique de la cavité acoustique en utilisant la méthode de Monte Carlo avec  $m = 2000$  réalisations. La Figure 5 (gauche) montre le graphe de la fonction de vraisemblance et la Figure 5 (droite) montre la réponse acoustique aléatoire donnée par le modèle acoustique dont le niveau d'incertitudes est  $\delta_f = \delta_f^{\text{opt}}$ .

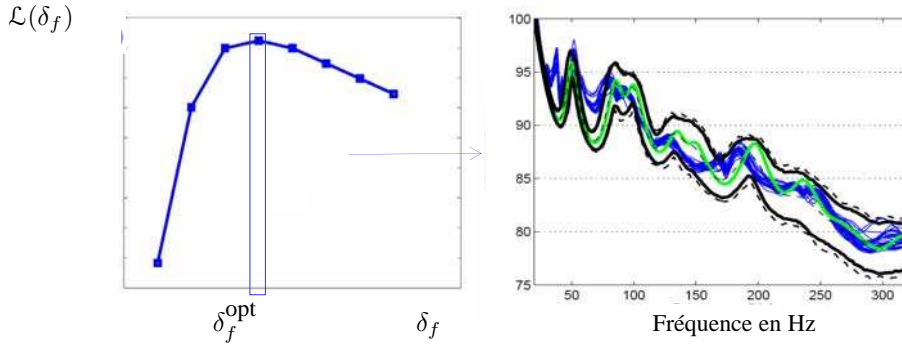


Figure 5 (**Gauche**) : graphe de la fonction de vraisemblance  $\delta_f \mapsto \mathcal{L}(\delta_f)$ . (**Droite**) : Réponse acoustique de la cavité en dB rms en fonction de la fréquence en Hz. Région de confiance à 0.96 de  $\omega \mapsto \text{dB}(\omega, \delta_f^{\text{opt}})$  construit avec le modèle réduit stochastique pour  $\delta_f = \delta_f^{\text{opt}}$  (lignes épaisses supérieure et inférieure). Mesures expérimentales (30 lignes bleues). Réponse du modèle moyen réduit (ligne verte).

Le paramètre vectoriel de dispersion  $\delta$  de la structure est identifié expérimentalement à l'aide de mesures d'accélération structurale effectuées pour des excitations aux supports du moteur sur  $\nu = 20$  voitures de même type avec différentes configurations. Le vecteur aléatoire d'observation est  $\mathbf{Y}(\omega, \delta) = (Y_1(\omega, \delta), \dots, Y_\mu(\omega, \delta))$  avec  $Y_j(\omega, \delta) = \log_{10}(w_j |U_{\ell_j}(\omega, \delta)|)$  où  $w_1, \dots, w_\mu$  sont des constantes de normalisation telles que  $0 < w_j \leq 1$ . L'identification expérimentale de  $\delta$  est obtenue en résolvant le problème d'optimisation suivant

$$\delta^{\text{opt}} = \arg \min_{\delta} J(\delta) \quad , \quad J(\delta) = \|\mathbf{Y}(\cdot, \delta) - \underline{\mathbf{Y}}(\cdot, \delta)\|^2 + \|\underline{\mathbf{Y}}(\cdot, \delta) - \underline{\mathbf{y}}^{\text{exp}}\|_B^2$$

avec  $\|\mathbf{Y}(\cdot, \delta) - \underline{\mathbf{Y}}(\cdot, \delta)\|^2 = E\{\int_B \|\mathbf{Y}(\omega, \delta) - \underline{\mathbf{Y}}(\omega, \delta)\|^2 d\omega\}$  qui est estimé avec le modèle réduit stochastique vibroacoustique et la méthode de Monte Carlo avec  $m = 1000$  réalisations. La Figure 6 montre le résultat de l'optimisation et les régions de confiance calculées avec le modèle

stochastique pour la valeur  $\delta = \delta^{\text{opt}}$  et pour une observation.

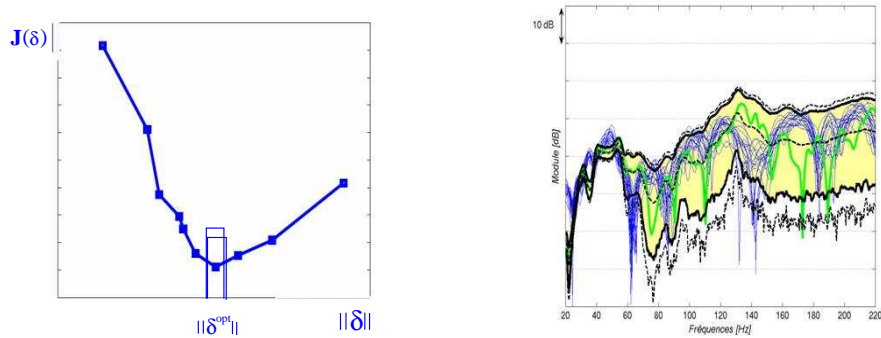


Figure 6 (**Gauche**) : Graphe de  $\|\delta\| \mapsto J(\delta)$  (l'axe horizontal est  $\|\delta\| = \sqrt{\delta_{M_s}^2 + \delta_{K_s}^2}$ ). (**Droite**) : Module de la FRF aléatoire en dB en fonction de la fréquence en Hz. Région de confiance (en jaune) pour 0.96 et 0.99. Mesures expérimentales (20 lignes bleues). Modèle moyen réduit (ligne verte).

La Figure 7 permet de valider l'ensemble de la modélisation stochastique et montre la prévision du domaine de confiance à 0.95 pour la pression acoustique en un point donné de la cavité et pour une excitation donnée du moteur. Les calculs sont faits avec le modèle réduit stochastique vibroacoustique pour  $\delta_f = \delta_f^{\text{opt}}$ ,  $\delta = \delta^{\text{opt}}$  et  $\delta_C$  fixé. La méthode de Monte Carlo est utilisée avec  $m = 600$  réalisations.

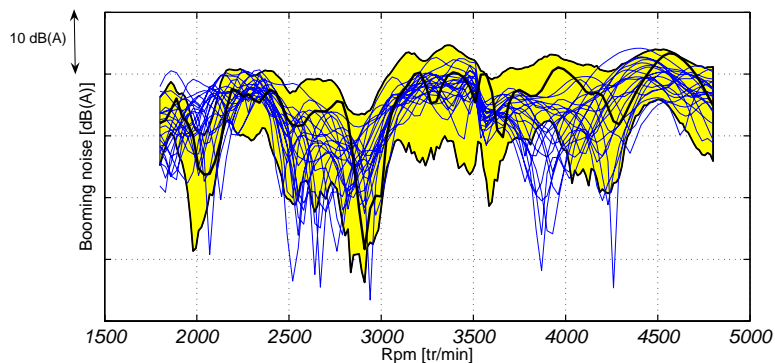


Figure 7 : Prévion de la région de confiance à 0.95 en dBA (en jaune) du module de la pression acoustique interne à un point fixé de la cavité acoustique et pour une excitation moteur donnée. Axe horizontal est la fréquence exprimée en nombre de tours par minute du moteur. Mesures (20 lignes bleues). Modèle moyen réduit (ligne noire épaisse).

## Références

- [1] M. Arnst, DR. Ghanem, Probabilistic equivalence and stochastic model reduction in multiscale analysis, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 197, 3584-3592, 2008.
- [2] M. Arnst, D. Clouteau, H. Chebli, R. Othman, G. Degrande, A nonparametric probabilistic model for ground-borne vibrations in buildings, *Probabilistic Engineering Mechanics*, 21(1), 18-34, 2006.
- [3] A. Batou, C. Soize, Identification of stochastic loads applied to a non-linear dynamical system using an uncertain computational model and experimental responses, *Computational Mechanics*, in press, pp. 1-13, 2009.

- [4] J.L. Beck, L.S. Katafygiotis, Updating models and their uncertainties. I: Bayesian statistical framework, *Journal of Engineering Mechanics* 124(4), 455-461, 1998.
- [5] M. Berveiller, B. Sudret, M. Lemaire, Stochastic finite element: a non-intrusive approach by regression, *European Journal of Computational Mechanics* 15, 81-92, 2006.
- [6] E. Capiez-Lernout, C. Soize, Nonparametric modeling of random uncertainties for dynamic response of mistuned bladed disks, *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 126(3), 600-618, 2004.
- [7] E. Capiez-Lernout, C. Soize, J.-P. Lombard, C. Dupont and E. Seinturier, Blade manufacturing tolerances definition for a mistuned industrial bladed disk, *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 127(3), 621-628, 2005.
- [8] E. Capiez-Lernout, M. Pellissetti, H. Pradlwarter, G.I. Schueller and C. Soize, Data and model uncertainties in complex aerospace engineering systems, *Journal of Sound and Vibration*, 295(3-5), 923-938, 2006.
- [9] E. Capiez-Lernout, C. Soize Design optimization with an uncertain vibroacoustic model, *Journal of Vibration and Acoustics*, 130(2), art. no. 021001, 1-8, 2008.
- [10] E. Capiez-Lernout, C. Soize, Robust design optimization in computational mechanics, *Journal of Applied Mechanics - Transactions of the ASME*, 75(2), 0210011-02100111, 2008.
- [11] E. Capiez-Lernout, C. Soize, Robust updating of uncertain damping models in structural dynamics for low- and medium-frequency ranges, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 22(8), 1774-1792, 2008.
- [12] H. Chebli and C. Soize, Experimental validation of a nonparametric probabilistic model of non homogeneous uncertainties for dynamical systems, *J. Acoust. Soc. Am.*, 115(2) 697-705, 2004.
- [13] C. Chen, D. Duhamel, C. Soize, Probabilistic approach for model and data uncertainties and its experimental identification in structural dynamics: Case of composite sandwich panels, *Journal of Sound and Vibration*, 294(1-2), 64-81, 2006.
- [14] R. Cottereau, D. Clouteau, C. Soize, Construction of a probabilistic model for impedance matrices, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 196(17-20), 2252-2268, 2007.
- [15] S. Das, R. Ghanem, J.C. Spall, Asymptotic sampling distribution for polynomial chaos representation from data: a maximum entropy and fisher information approach, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 30(5), 2207-2234, 2008.
- [16] G. Deodatis, P.D. Spanos (guest editors), 5th International Conference on Computational Stochastic Mechanics, *Special issue of the Probabilistic Engineering Mechanics*, 23(2-3), 103-346, 2008.
- [17] C. Desceliers, C. Soize, S. Cambier, Non-parametric - parametric model for random uncertainties in nonlinear structural dynamics - Application to earthquake engineering, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 33(3), 315-327, 2004.
- [18] C. Desceliers, R. Ghanem and C. Soize, Maximum likelihood estimation of stochastic chaos representations from experimental data, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 66(6), 978-1001, 2006.
- [19] C. Desceliers, C. Soize, R. Ghanem, Identification of chaos representations of elastic properties of random media using experimental vibration tests, *Computational Mechanics*, 39(6), 831-838, 2007.
- [20] C. Desceliers, C. Soize, Q. Grimal, G. Haiat, S. Naili, A time domain method to solve transient elastic wave propagation in a multilayer medium with a hybrid spectral-finite element space approximation, *Journal of Wave Motion*, 45(4), 383-399, 2008.
- [21] J. Duchereau and C. Soize, Transient dynamics in structures with nonhomogeneous uncertainties induced by complex joints, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 20(4), 854-867, 2006.
- [22] J.-F. Durand, C. Soize, L. Gagliardini, Structural-acoustic modeling of automotive vehicles in presence of uncertainties and experimental identification and validation, *J. Acoust. Soc. Am.*, 124(3), 1513-1525, 2008.

- [23] B. Faverjon, R. Ghanem, Stochastic inversion in acoustic scattering, *J. Acoust. Soc. Am.*, 119(6), 3577-3588, 2006.
- [24] S. Geman, D. Geman, Stochastic relaxation, Gibbs distribution and the Bayesian distribution of images, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol PAM I-6, 721-741, 1984.
- [25] R. Ghanem, P.D. Spanos, *Stochastic Finite Elements: A spectral Approach*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [26] R. Ghanem, R. M. Kruger, Numerical solution of spectral stochastic finite element systems, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 129, 289-303, 1996.
- [27] R. Ghanem, S. Masri, M. Pellissetti, R. Wolfe, Identification and prediction of stochastic dynamical systems in a polynomial chaos basis, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 194(12-16), 1641-1654, 2005.
- [28] J. Guillemot, C. Soize, D. Kondo, C. Benetruy, Theoretical framework and experimental procedure for modelling volume fraction stochastic fluctuations in fiber reinforced composites, *International Journal of Solid and Structures*, 45(21), 5567-5583, 2008.
- [29] W.K. Hastings, Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications, *Biometrika*, 109, 57-97, 1970.
- [30] E.T. Jaynes, Information theory and statistical mechanics, *Physical Review*, 106(4), 620-630 & 108(2), 171-190, 1957.
- [31] J. Kaipio, E. Somersalo, *Statistical and Computational Inverse Problems*, Springer-Verlag, New York, 2005.
- [32] O.P. Le Maitre, H.N. Najm, R. Ghanem *et al.*, Multi-resolution analysis of Wiener-type uncertainty propagation schemes, *Journal of Computational Physics*, 197(2), 502-531, 2004.
- [33] O.P. Le Maitre, H.N. Najm, P.P. Pebay, *et al.*, Multi-resolution-analysis scheme for uncertainty quantification in chemical systems, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 29(2), 864-889, 2007.
- [34] R.R. Mace, W. Worden, G. Manson G. (guest editors), Uncertainty in Structural Dynamics, *Special issue of the Journal of Sound and Vibration*, 288(3), 431-790, 2005.
- [35] P.K. MacKeown, *Stochastic Simulation in Physics*, Springer-Verlag, Singapore, 1997.
- [36] M.L. Mehta, *Random Matrices*, Revised and Enlarged Second Edition, Academic Press, New York, 1991.
- [37] M. P. Mignolet, C. Soize, Nonparametric stochastic modeling of linear systems with prescribed variance of several natural frequencies, *Probabilistic Engineering Mechanics*, 23(2-3), 267-278, 2008.
- [38] M. P. Mignolet, C. Soize, Nonparametric stochastic modeling of structural dynamic systems with uncertain boundary conditions, AIAA Conference, Schaumburg (Chicago), Illinois, USA, 7-10 April 2008.
- [39] M. P. Mignolet and C. Soize, Stochastic reduced order models for uncertain nonlinear dynamical systems, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 197(45-48), 3951-3963, 2008.
- [40] A.A. Muravyov, S.A. Rizzi, Determination of nonlinear stiffness with application to random vibration of geometrically nonlinear structures, *Computers and Structures*, 81(15), 1513-1523, 2003.
- [41] A. Nouy, A generalized spectral decomposition technique to solve a class of linear stochastic partial differential equations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 196(45-48), 4521-4537, 2007
- [42] A. Nouy, O.P. Le Maitre, Generalized spectral decomposition for stochastic nonlinear problems, *Journal of Computational Physics*, 228(1), 202-235, 2009.
- [43] R. Ohayon, C. Soize, *Structural Acoustics and Vibration*, Academic Press, San Diego, London, 1998.
- [44] M. Pellissetti, E. Capiez-Lernout, H. Pradlwarter, C. Soize, G.I. Schueller, Reliability analysis of a satellite structure with a parametric and a non-parametric probabilistic model, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 198(2), 344-357, 2008.

- [45] R. Sampaio, C. Soize, On measures of non-linearity effects for uncertain dynamical systems - Application to a vibro-impact system, *Journal of Sound and Vibration*, 303(3-5), 659-674, 2007.
- [46] G.I. Schueller (guest editor). Computational Methods in Stochastic Mechanics and Reliability Analysis, *Special issue of Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 194(12-16), 1251-1795, 2005.
- [47] G.I. Schueller (guest editor). Uncertainties in Structural Mechanics and Analysis-Computational Methods, *Special issue of Computer and Structures*, 83(14), 1031-1150, 2005.
- [48] R.J. Serfling, *Approximation Theorems of Mathematical Statistics*, John Wiley & Sons, 1980.
- [49] C.E. Shannon, A mathematical theory of communication, *Bell System Technology Journal*, 27, 379-423 & 623-659, 1948.
- [50] C. Soize, *The Fokker-Planck Equation for Stochastic Dynamical Systems and its Explicit Steady State Solutions*, World Scientific Publishing Co Pte Ltd, Singapore, 1994.
- [51] C. Soize, A nonparametric model of random uncertainties on reduced matrix model in structural dynamics, *Probabilistic Engineering Mechanics*, 15(3), 277-294, 2000.
- [52] C. Soize, Maximum entropy approach for modeling random uncertainties in transient elastodynamics, *J. Acoust. Soc. Am.*, 109(5), 1979-1996, 2001.
- [53] C. Soize, Random matrix theory and non-parametric model of random uncertainties, *Journal of Sound and Vibration*, 263(4), 893-916, 2003.
- [54] C. Soize, Uncertain dynamical systems in the medium-frequency range, *Journal of Engineering Mechanics*, 129(9), 1017-1027, 2003.
- [55] C. Soize, Random matrix theory for modeling uncertainties in computational mechanics, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 194(12-16), 1333-1366, 2005.
- [56] C. Soize, A comprehensive overview of a non-parametric probabilistic approach of model uncertainties for predictive models in structural dynamics, *Journal of Sound and Vibration*, 288(3), 623-652, 2005.
- [57] C. Soize, Non Gaussian positive-definite matrix-valued random fields for elliptic stochastic partial differential operators, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 195(1-3), 26-64, 2006.
- [58] C. Soize, Tensor-valued random fields for meso-scale stochastic model of anisotropic elastic microstructure and probabilistic analysis of representative volume element size, *Probabilistic Engineering Mechanics*, 23(2-3), 307-323, 2008.
- [59] C. Soize, Construction of probability distributions in high dimension using the maximum entropy principle. Applications to stochastic processes, random fields and random matrices, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 76(10), 1583-1611, 2008.
- [60] C. Soize, Nonparametric probabilistic approach of uncertainties for elliptic boundary value problem, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, in press, 2009.
- [61] C. Soize and H. Chebli, Random uncertainties model in dynamic substructuring using a nonparametric probabilistic model, *Journal of Engineering Mechanics*, 129(4), 449-457, 2003.
- [62] C. Soize and R. Ghanem, Physical systems with random uncertainties : Chaos representation with arbitrary probability measure, *SIAM Journal On Scientific Computing*, 26(2), 395-410, 2004.
- [63] C. Soize, R. Ghanem, Reduced chaos decomposition with random coefficients of vector-valued random variables and random fields, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, in press, 2009.
- [64] C. Soize, E. Capiez-Lernout, R. Ohayon, Robust updating of uncertain computational models using experimental modal analysis, *AIAA Journal*, 46(11), 2955-2965, 2008.
- [65] C. Soize, E. Capiez-Lernout, J.-F. Durand, C. Fernandez, L. Gagliardini, Probabilistic model identification of uncertainties in computational models for dynamical systems and experimental validation, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 198(1), 150-163, 2008.
- [66] J.C. Spall, *Introduction to Stochastic Search and Optimization*, John Wiley, 2003.
- [67] N. Wiener, The Homogeneous Chaos, *American Journal of Mathematics*, 60, 897-936, 1938.