

**Problème stochastique inverse et représentation sur les  
chaos pour l'identification expérimentale des champs  
stochastiques modélisant le comportement des milieux  
élastiques tridimensionnelles**

Christophe Desceliers, R. Ghanem, Christian Soize

► **To cite this version:**

Christophe Desceliers, R. Ghanem, Christian Soize. Problème stochastique inverse et représentation sur les chaos pour l'identification expérimentale des champs stochastiques modélisant le comportement des milieux élastiques tridimensionnelles. 17ème Congrès Français de Mécanique 2005, AFM, Aug 2005, Troyes, France. pp.Pages: 1-6. hal-00773339

**HAL Id: hal-00773339**

**<https://hal-upec-upem.archives-ouvertes.fr/hal-00773339>**

Submitted on 13 Jan 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Problème stochastique inverse et représentation sur les chaos pour l'identification expérimentale des champs stochastiques modélisant le comportement des milieux élastiques tridimensionnelles

C. Desceliers<sup>(1)</sup>, R. Ghanem<sup>(2)</sup> et C. Soize<sup>(1)</sup>

<sup>(1)</sup> Université de Marne-la-Vallée,  
Laboratoire de Mécanique, Institut Navier,  
5 bd Descartes, 77454 Marne-la-Vallée Cedex 2  
christophe.desceliers@univ.mlv.fr  
soize@univ-mlv.fr

<sup>(2)</sup> John Hopkins University  
Baltimore, USA  
ghanem@hyperion.ce.jhu.edu

## Résumé :

*Cette communication porte sur l'identification du modèle probabiliste d'un champ de module d'Young aléatoire d'un milieu linéaire élastique isotrope non homogène. La méthode est basée sur la représentation sur les chaos du champ stochastique à identifier donnant lieu à un problème inverse et un problème d'optimisation issu du principe du maximum de vraisemblance.*

## Abstract :

*This paper deals with the experimental identification of the probabilistic representation of a random field modeling the Young modulus of a non homogeneous isotropic elastic linear medium. The proposed method is based on the chaos decomposition of the stochastic field to identify setting an inverse problem and an optimization problem based on the maximum likelihood principle.*

## Mots-clefs :

**Problème stochastique inverse ; identification expérimentale ; élasticité tridimensionnelle**

## 1 Introduction

Dans la plupart des problèmes de sciences et d'ingénierie, les systèmes physiques sont décrits par des problèmes aux limites dont les paramètres sont des variables aléatoires ou des champs stochastiques. L'un des problèmes fondamentaux consiste à identifier expérimentalement les modèles probabilistes de ces paramètres aléatoires. Bien que cette catégorie de problème ait attiré une attention considérable ces dix dernières années de la part des mathématiciens, des physiciens et des ingénieurs (voir par exemple [1, 2]), presque rien n'existe concernant une procédure constructive complète pour l'identification expérimentale du modèle probabiliste des champs aléatoires modélisant les paramètres des opérateurs différentiels des problèmes aux limites tels que des milieux élastiques aléatoires.

Cette communication porte sur l'identification expérimentale du modèle probabiliste des coefficients aléatoires des opérateurs différentiels stochastiques des problèmes aux limites. Nous présentons une méthode en s'appuyant sur l'exemple de l'identification expérimentale du champ stochastique modélisant le module d'Young d'un milieu hétérogène élastique isotropique linéaire. Les "données expérimentales" correspondent aux mesures du champ de déplacement du bord de plusieurs éprouvettes soumises à des forces extérieures déterminées. Pour valider la méthode, on se munit d'une base de "données expérimentales" préalablement construite par simulations numériques du champ de déplacement du bord des éprouvettes.

## 2 Présentation de la méthode

La méthode proposée est la suivante. On se donne préalablement une base de données de mesures du champ de déplacement statique du bord de plusieurs "éprouvettes" soumises à un chargement extérieur donné. La méthode proposée pour identifier le champ stochastique modélisant les paramètres est la suivante : (1) développement d'un modèle mécanique de l'éprouvette en élasticité linéaire tridimensionnel isotrope non homogène ; (2) représentation du champ stochastique à identifier sur la base des éléments finis de l'éprouvette ; (3) pour chaque "éprouvette" de la base de données, le problème inverse est résolu pour construire la réalisation correspondante pour l'éprouvette considérée du champ stochastique, donnant lieu à un premier problème d'optimisation ; (4) une représentation sur les chaos ([3,4,5]) du champ stochastique est alors identifiée à l'aide des réalisations construites en utilisant le principe du maximum de vraisemblance ce qui conduit à résoudre un second problème d'optimisation.

Cette méthode permet de calculer les coefficients de la représentation sur les chaos. Les paragraphes suivants présentent un résumé de la méthodologie détaillé dans [6] en s'appuyant sur une application numérique

## 3 Construction de la base de données expérimentales par simulation numérique de Monte Carlo du problème direct

On considère le problème aux limites correspondant au problème d'élastostatique tridimensionnel d'une structure occupant un domaine borné  $\mathcal{D}$  de frontière  $\partial\mathcal{D}$  dans un système d'axes cartésien  $(O, x_1, x_2, x_3)$ . La géométrie du domaine  $\mathcal{D}$  est un parallélépipède élancé dont les dimensions selon  $x_1, x_2$  et  $x_3$  sont  $L_1 = 1.3 \times 10^{-1}m$ ,  $L_2 = 2 \times 10^{-2}m$  et  $L_3 = 2 \times 10^{-2}m$  (voir Fig. 1). La structure est encastrée sur la partie  $\Gamma_0$  (section  $x_1 = 0$ ) du bord  $\partial\mathcal{D}$ .

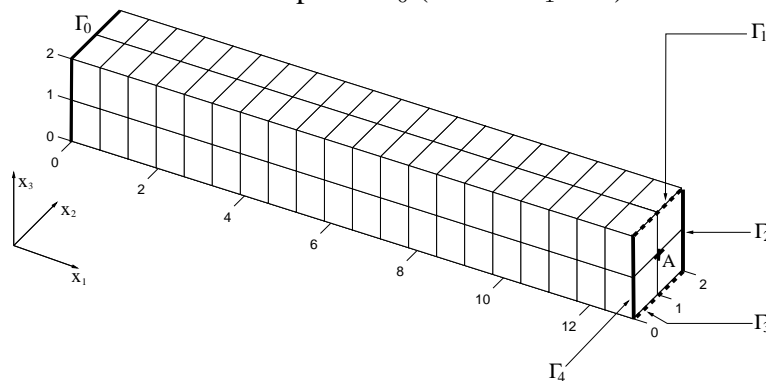


FIG. 1 – Définition du système mécanique

La structure est soumise à 14 forces extérieures ponctuelles appliquées sur les noeuds de la face  $x_1 = L_1$ . Pour  $j = 1, \dots, 4$ , soient  $\mathbf{f}_j$  la force appliquée à chacun des 3 noeuds de l'arrête  $\Gamma_j$  (voir Fig. 1) avec  $\mathbf{f}_1 = (0, 0, 1)$ ,  $\mathbf{f}_2 = (0, 1, 0)$ ,  $\mathbf{f}_3 = -\mathbf{f}_1$  et  $\mathbf{f}_4 = -\mathbf{f}_2$ . Soient  $\mathbf{f}_5$  et  $\mathbf{f}_6$  les forces ponctuelles appliquées au noeud A (voir Fig. 1) avec  $\mathbf{f}_5 = (2, 0, 0)$  et  $\mathbf{f}_6 = (0, 2, 0)$ .

Le milieu élastique est aléatoire. On suppose que le seul paramètre aléatoire de ce milieu est le module d'Young modélisé par un champ stochastique  $\mathcal{E}$ . En réalité, il faudrait considérer le module d'Young et le coefficient de Poisson comme des paramètres aléatoires. L'hypothèse introduite est une mesure de simplification de l'exposé. Le champ stochastique  $\mathcal{E}$  est indexé sur  $\mathcal{D}$ , à valeurs positives, du second ordre, tel que

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}) = \mathcal{E}_0 \delta^2 h(1/\delta^2, V(\mathbf{x})) \quad , \quad (1)$$

où  $E\{\mathcal{E}(\mathbf{x})\} = \mathcal{E}_0 > 0$  est la valeur moyenne de  $\mathcal{E}$  indépendante de  $\mathbf{x}$ , où  $\delta > 0$  est un réel positif indépendant de  $\mathbf{x}$  permettant de contrôler le niveau de dispersion de  $\mathcal{E}$  et où  $\delta^2 = \mathcal{E}_0^{-2} E\{(\mathcal{E}(\mathbf{x}) - \mathcal{E}_0)^2\}$ . La fonction  $u \mapsto h(\alpha, u)$  de  $\mathbb{R}$  dans  $]0, +\infty[$  est telle que  $\Gamma_\alpha = h(\alpha, U)$  est une variable aléatoire gamma de paramètre  $\alpha$  si  $U$  est une variable aléatoire gaussienne normalisée. D'autre part, au second membre de l'Eq. (1),  $\{V(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathcal{D}\}$  est un champ stochastique gaussien normalisé du second ordre défini par  $V(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^3 \xi_k \sqrt{\gamma_k} \psi_k(\mathbf{x})$  où  $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$  sont des variables aléatoires gaussiennes,  $\{\gamma_k\}_{k \geq 1}$  sont les valeurs propres de l'opérateur intégrale  $\mathcal{C}$  de noyau  $C(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \exp(-|x_1 - x'_1|/L)$  avec  $L = 3.25 \times 10^{-2}m$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  et  $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, x'_3)$  dans  $\mathcal{D}$ . Les fonctions  $\{\psi_k\}_{k \geq 1}$  sont définies par  $\psi_k(\mathbf{x}) = \tilde{\psi}_k(2\mathbf{x}) / (\sum_{k=1}^3 \gamma_k \tilde{\psi}_k(2\mathbf{x})^2)^{1/2}$  où  $\{\tilde{\psi}_k\}_{k \geq 1}$  est la famille des fonctions propres associés aux valeurs propres  $\{\gamma_k\}_{k \geq 1}$  de l'opérateur intégrale  $\mathcal{C}$ . Pour ce modèle,  $\mathcal{E}(\mathbf{x}) = \mathcal{E}(x_1)$  est indépendant de  $x_2$  et  $x_3$ .

Le maillage éléments finis du domaine  $\mathcal{D}$  (voir Fig. 1) est constitué d'éléments finis solides 3D isoparamétriques à 8 noeuds. Le nombre de degrés de liberté est  $N_d = 117$ . On note  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ , où  $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$  sont les variables aléatoires gaussiennes indépendantes introduites dans la définition du champ stochastique  $V$ . Soit  $[A(\boldsymbol{\xi})]$ , la matrice de raideur relative à la discrétisation par éléments finis du milieu élastique occupant le domaine  $\mathcal{D}$ . On note  $\mathbf{X} = \mathbb{X}(\boldsymbol{\xi})$ , le vecteur aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{R}^{N_d}$  des déplacements nodaux. On a donc

$$[A(\boldsymbol{\xi})]\mathbf{X} = \mathbf{G} \quad , \quad (2)$$

où  $\mathbf{G}$  est le vecteur de  $\mathbb{R}^{N_d}$  correspondant aux forces extérieures. Soit  $\mathbf{X}_{\partial\mathcal{D}} = \mathbb{X}(\boldsymbol{\xi})_{\partial\mathcal{D}}$ , le vecteur des  $N_b = 81$  degrés de liberté des noeuds du bord  $\partial\mathcal{D}$ . L'application qui à tout vecteur de déplacement  $\mathbf{X}$  associe le vecteur de déplacement  $\mathbf{X}_{\partial\mathcal{D}}$  est notée  $P$ . La "base de données expérimentales" est constituée de  $m = 50$  réalisations aléatoires  $\mathbf{X}_{\partial\mathcal{D}}^1 = \mathbf{X}_{\partial\mathcal{D}}(\theta_1), \dots, \mathbf{X}_{\partial\mathcal{D}}^m = \mathbf{X}_{\partial\mathcal{D}}(\theta_m)$  de  $\mathbf{X}_{\partial\mathcal{D}}$ . Cette "base de données expérimentales" est générée par simulation numérique de Monte-Carlo du problème directe défini par l'Eq. (2).

#### 4 Identification du champ aléatoire modélisant le module d'Young par résolution d'un problème inverse et réduction statistique

L'approximation sur la base des éléments finis du champ aléatoire  $\mathcal{E}$  indexé par  $\mathcal{D}$  s'écrit  $\tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{N_i} \tilde{\mathcal{E}}_k h_k(x_1)$  où  $h_1(x_1), \dots, h_{N_i}(x_1)$  sont les fonctions d'interpolation linéaire relatives au maillage éléments finis du domaine  $\mathcal{D}$ ,  $N_i = 20$  est le degré de cette approximation et  $\tilde{\mathcal{E}}_1, \dots, \tilde{\mathcal{E}}_{N_i}$  sont les coefficients d'interpolation. La matrice de raideur issue de la discrétisations par éléments finis du milieu élastique occupant le domaine  $\mathcal{D}$  avec l'approximation  $\tilde{\mathcal{E}}$  du module d'Young (au lieu de  $\mathcal{E}$ ) est notée  $[\tilde{A}(\tilde{\boldsymbol{\eta}}_0)]$  où  $\tilde{\boldsymbol{\eta}}_0 = (\tilde{\mathcal{E}}_1, \dots, \tilde{\mathcal{E}}_{N_i})$ . Pour chaque élément  $\mathbf{X}_{\partial\mathcal{D}}^1, \dots, \mathbf{X}_{\partial\mathcal{D}}^m$  de la "base de données expérimentales", les réalisations  $\tilde{\mathbf{y}}_0^1 = \tilde{\boldsymbol{\eta}}_0(\theta_1), \dots, \tilde{\mathbf{y}}_0^m = \tilde{\boldsymbol{\eta}}_0(\theta_m)$  de la variable aléatoire  $\tilde{\boldsymbol{\eta}}_0$  sont construites de sorte que  $\ell(\tilde{\mathbf{y}}_0^1, \mathbf{X}_{\partial\mathcal{D}}^1), \dots, \ell(\tilde{\mathbf{y}}_0^m, \mathbf{X}_{\partial\mathcal{D}}^m)$  soient les minima des fonctions  $\tilde{\mathbf{y}} \mapsto \ell(\tilde{\mathbf{y}}, \mathbf{X}_{\partial\mathcal{D}}^1), \dots, \tilde{\mathbf{y}} \mapsto \ell(\tilde{\mathbf{y}}, \mathbf{X}_{\partial\mathcal{D}}^m)$  où  $\ell(\tilde{\mathbf{y}}, \mathbf{z}) = \|P([\tilde{A}(\tilde{\mathbf{y}})]^{-1}\mathbf{G}) - \mathbf{z}\|^2$ . Finalement, pour tout  $\mathbf{x}$  donné dans  $\mathcal{D}$ , les réalisations  $\tilde{\mathcal{E}}^1(\mathbf{x}) = \tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{x}; \theta_1), \dots, \tilde{\mathcal{E}}^m(\mathbf{x}) = \tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{x}; \theta_m)$  de la variable aléatoire  $\tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{x})$  sont construites en utilisant les relations  $\tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{x}; \theta_j) = \sum_{k=1}^{N_i} \tilde{\mathcal{E}}_k(\theta_j) h_k(x_1)$  et  $\mathcal{E}_k(\theta_j) = \tilde{\mathbf{y}}_{0,k}^j$ .

Il est possible de réduire la taille du vecteur  $\tilde{\boldsymbol{\eta}}_0$  utilisé dans la représentation du champ aléatoire  $\mathcal{E}$  modélisant le module d'Young. Soient  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_{N_i}$ , les valeurs propres de la matrice de covariance du vecteur aléatoire  $\boldsymbol{\eta}$ . Les vecteurs propres orthonormés associés aux valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_{N_i}$  sont notés  $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_{N_i}$ . Le vecteur aléatoire  $\tilde{\boldsymbol{\eta}}$  peut être réécrit sous la forme  $\tilde{\boldsymbol{\eta}} = \sum_{j=1}^{N_i} \eta_j \sqrt{\lambda_j} \mathbf{F}_j$  où  $\eta_1, \dots, \eta_{N_i}$  sont  $N_i$  variables aléatoires centrées définies par

$\sqrt{\lambda_j}\eta_j = \langle \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \mathbf{F}_j \rangle_{\mathbb{R}^{N_i}}$  et tels que pour tout  $j$  et  $k$ ,

$$E\{\eta_j\} = 0 \text{ et } E\{\eta_j\eta_k\} = \delta_{jk} \quad . \quad (3)$$

La figure 2 montre le graphe de l'application  $k \mapsto \sum_{i=1}^k \lambda_i^2$ . On construit alors une approximation du vecteur aléatoire  $\tilde{\boldsymbol{\eta}}$  avec le vecteur aléatoire  $\tilde{\boldsymbol{\eta}}^\mu = \sum_{j=1}^\mu \eta_j \sqrt{\lambda_j} \mathbf{F}_j$  pour  $\mu = 5$ .

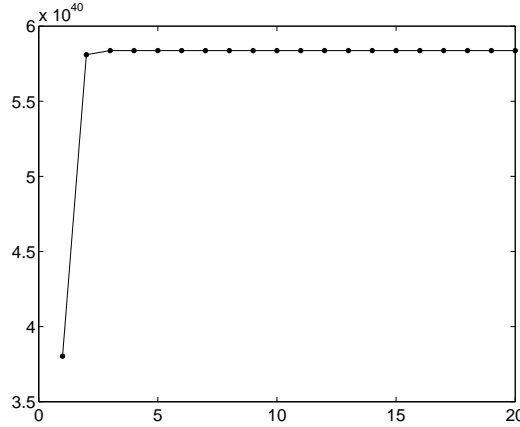


FIG. 2 – Convergence de la réduction statistique : graphe de  $k \mapsto \sum_{i=1}^k \lambda_i^2$ . Axe horizontale  $k$ , axe verticale  $\sum_{i=1}^k \lambda_i^2$ .

On introduit la variable aléatoire  $\boldsymbol{\eta}^\mu$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^\mu$  définie par  $\boldsymbol{\eta}^\mu = (\eta_1, \dots, \eta_\mu)$ . Les réalisations  $\mathbf{y}^1 = \boldsymbol{\eta}^\mu(\theta_1), \dots, \mathbf{y}^m = \boldsymbol{\eta}^\mu(\theta_m)$  du vecteur aléatoire  $\boldsymbol{\eta}^\mu$  sont telles que, pour tout  $j = 1, \dots, \mu$  et  $k = 1, \dots, m$ , l'égalité  $y_j^k = 1/\sqrt{\lambda_j} \langle \tilde{\mathbf{y}}^k, \mathbf{F}_j \rangle_{\mathbb{R}^{N_i}}$  est vérifiée avec  $\mathbf{y}^k = (y_1^k, \dots, y_\mu^k)$ .

## 5 Représentation Chaos du champ aléatoire à identifier

Soit  $\mathbf{W}^\nu = (W_1, \dots, W_\nu)$ , le vecteur gaussien centré de dimension  $\nu$  tel que  $E\{W_i W_j\} = \delta_{ij}$ . Le développement Chaos du vecteur aléatoire  $\boldsymbol{\eta}^\mu$  s'écrit

$$\boldsymbol{\eta}^{\mu, \nu} = \sum_{\alpha, |\alpha|=1}^{+\infty} \mathbf{a}_\alpha \phi_\alpha(\mathbf{W}^\nu) \quad (4)$$

où  $\alpha$  est un multi-indexe de longueur  $\mu$  et  $\phi_\alpha(\mathbf{W}^\nu)$  sont les polynôme d'Hermite multi-indexé. On déduit de l'Eq. (3) que les coefficients  $\mathbf{a}_\alpha$  vérifient  $\sum_{\alpha, |\alpha|=1}^{+\infty} \mathbf{a}_\alpha \mathbf{a}_\alpha^T = [I_\mu]$ , où  $[I_\mu]$  est la matrice unité de dimension  $(\mu \times \mu)$ . L'approximation  $\boldsymbol{\eta}^{\mu, \nu, q}$  de  $\boldsymbol{\eta}^{\mu, \nu}$  est obtenue par troncature à l'ordre  $q$  du développement chaos défini par Eq. (4). On a donc  $\boldsymbol{\eta}^{\mu, \nu, q} = \sum_{\alpha, |\alpha|=1}^q \mathbf{a}_\alpha \phi_\alpha(\mathbf{W}^\nu)$ . L'approximation correspondante  $\tilde{\mathcal{E}}^{\mu, \nu, q}$  du champ aléatoire  $\tilde{\mathcal{E}}$  défini au paragraphe 4 est telle que  $\tilde{\mathcal{E}}^{\mu, \nu, q}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{N_i} \tilde{\mathcal{E}}_k^{\mu, \nu, q} h_k(x_1)$ .

Afin de calculer les coefficients  $\mathbf{a}_\alpha \in \mathbb{R}^\mu$ , le problème d'optimisation suivant est résolu : pour tout  $\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^m$  donnés (dans la "base de données expérimentales"), trouver  $\mathbf{A} = \{\mathbf{a}_\alpha, |\alpha| = 1, \dots, q\}$  maximisant la fonction de vraisemblance  $L(\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^m; \mathbf{A}) = p_{\boldsymbol{\eta}^{\mu, \nu, q}}(\mathbf{y}^1, \mathbf{A}) \times \dots \times p_{\boldsymbol{\eta}^{\mu, \nu, q}}(\mathbf{y}^m, \mathbf{A})$  où  $p_{\boldsymbol{\eta}^{\mu, \nu, q}}$  est la fonction de densité de probabilité de la variable aléatoire  $\boldsymbol{\eta}^{\mu, \nu, q}$ . Toutefois, un tel problème d'optimisation induit un coût de calcul important dû à l'estimation de  $p_{\boldsymbol{\eta}^{\mu, \nu, q}}(\mathbf{y}^j, \mathbf{A})$  lorsque la longueur  $\mu$  du vecteur aléatoire

$\eta$  prend des valeurs plus grande que 4 ou 5, valeurs qui sont toujours beaucoup plus petites que celle que  $\mu$  prend en générale. Par conséquent, on propose de substituer la fonction de vraisemblance habituelle par une fonction de pseudo-vraisemblance  $\tilde{L}(\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^m; \mathbf{A}) = \prod_{j=1}^{\mu} p_{\eta_j^{\mu, \nu, q}}(y_j^1, \mathbf{A}) \times \dots \times \prod_{j=1}^{\mu} p_{\eta_j^{\mu, \nu, q}}(y_j^m, \mathbf{A})$  où  $p_{\eta_j^{\mu, \nu, q}}$  est la fonction de probabilité de la variable aléatoire  $\eta_j^{\mu, \nu, q}$  avec  $\boldsymbol{\eta}^{\mu, \nu, q} = (\eta_1^{\mu, \nu, q}, \dots, \eta_{\mu}^{\mu, \nu, q})$ . Le problème d'optimisation permettant de calculer les coefficients  $\mathbf{a}_{\alpha}$  devient : pour tout  $\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^m$  donnés, trouver  $\mathbf{A}$  qui maximise la fonction de pseudo-vraisemblance  $\tilde{L}(\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^m; \mathbf{A})$  tel que  $\sum_{\alpha, |\alpha|=1}^q \mathbf{a}_{\alpha} \mathbf{a}_{\alpha}^T = [I_{\mu}]$ .

## 6 Analyse de convergence

Afin d'effectuer une analyse de convergence de la méthode proposée, les champs stochastiques normalisés  $\varepsilon$  et  $\tilde{\varepsilon}^{\mu, \nu, q}$  indexés sur  $\mathcal{D}$  avec  $\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathcal{E}(\mathbf{x})/E\{\mathcal{E}(\mathbf{x})\}$  et  $\tilde{\varepsilon}^{\mu, \nu, q}(\mathbf{x}) = \tilde{\mathcal{E}}^{\mu, \nu, q}(\mathbf{x})/E\{\tilde{\mathcal{E}}^{\mu, \nu, q}(\mathbf{x})\}$  sont introduits. Pour tout  $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ , les fonctions de densité de probabilité  $p_{\varepsilon(\mathbf{x})}(e; \mathbf{x})$  et  $p_{\tilde{\varepsilon}^{\mu, \nu, q}(\mathbf{x})}(e; \mathbf{x})$  des variables aléatoires  $\varepsilon(\mathbf{x})$  et  $\tilde{\varepsilon}^{\mu, \nu, q}(\mathbf{x})$  sont introduites. La figure 3 montre les graphes de  $e \mapsto p_{\varepsilon(\mathbf{x})}(e; \mathbf{x})$  et  $e \mapsto p_{\tilde{\varepsilon}^{\mu, \nu, q}(\mathbf{x})}(e; \mathbf{x})$  pour  $x_1 = L_1/20$ ,  $\mu = 5$ ,  $q = 6$  et pour  $\nu = 1, \dots, 8$ . On remarque que  $(p_{\tilde{\varepsilon}^{\mu, \nu, q}(\mathbf{x})})_{\nu \geq 1}$  a convergé lorsque  $\nu = 3$ . La figure 4 montre,

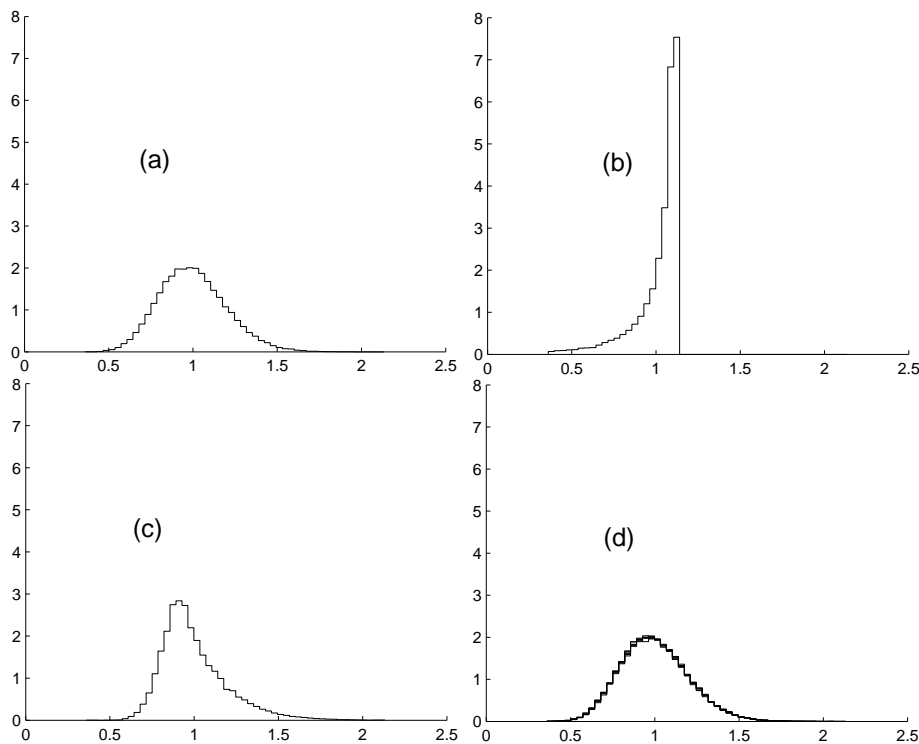


FIG. 3 – Exemples de fonctions de densité de probabilité  $\tilde{\varepsilon}^{\mu, \nu, q}$  pour  $\nu = 1, \dots, 8$  avec  $\mu = 5$  et  $q = 6$  : Fig. a montre le graphe de la fonction de densité de probabilité de référence  $e \mapsto p_{\varepsilon(\mathbf{x})}(e; \mathbf{x})$  aux points  $x_1 = L_1/20$ . Les graphes de  $e \mapsto p_{\tilde{\varepsilon}^{\mu, \nu, q}(\mathbf{x})}(e; \mathbf{x})$  aux points  $x_1 = L_1/20$  sont construits pour  $\nu = 1$  (Fig. b),  $\nu = 2$  (Fig. c) and  $\nu = 3, \dots, 8$  (Fig. d).

pour  $x_1 = L_1/20$  les graphes des fonctions de probabilité  $e \mapsto p_{\tilde{\varepsilon}^{\mu, \nu, q}(\mathbf{x})}(e; \mathbf{x})$  pour  $\mu = 5$ ,  $\nu = 3$  et pour  $q = 1, 2, 3$ . On remarque que  $(p_{\tilde{\varepsilon}^{\mu, \nu, q}(\mathbf{x})})_{q \geq 1}$  a convergé pour  $q$  supérieur ou égal à 3. Le graphe de la fonction de densité de probabilité  $e \mapsto p_{\varepsilon(\mathbf{x})}(e; \mathbf{x})$  en échelle logarithmique montre que  $\varepsilon(\mathbf{x})$  n'est pas une variable aléatoire gaussienne.

Les résultats de convergence sont similaires pour les autres valeurs de  $x_1$ .

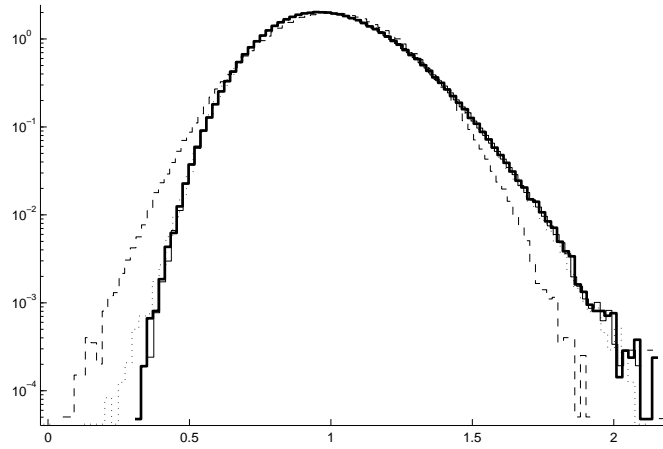


FIG. 4 – Analyse de convergence de la fonction de probabilité de  $\tilde{\epsilon}^{\mu,\nu,q}$  par rapport à l'ordre  $q$  de la représentation chaos avec  $\mu = 5$  et  $\nu = 3$  :  $p_{\epsilon(\mathbf{x})}(e; \mathbf{x})$  (trait continu épais),  $p_{\epsilon^{\mu,\nu,q}(\mathbf{x})}(e; \mathbf{x})$  avec  $q = 1$  (trait tiré fin),  $q = 2$  (trait pointillé fin) et  $q = 3$  (trait continu fin). Axe horizontal la dimension  $q$  de la représentation chaos, axe vertical fonction de densité de probabilité.

## 7 Conclusion

Une méthode permettant de résoudre le problème inverse stochastique pour l'identification expérimentale des systèmes à paramètres stochastique est proposée. Cette méthode utilise le développement chaos du champ stochastique à identifier ainsi que le principe du maximum de vraisemblance. Les propriétés de convergence de cette représentation stochastique sont étudiées au travers d'un exemple numérique. Pour l'exemple traité, cette méthode permet d'identifier les fonctions de probabilité. Une telle méthode peut être étendue à la dynamique des structures.

## Références

- [1] Tleubergenov, M. I., (2001) "An Inverse Problem for Stochastic Differential Systems", *Differential Equations*, **37** (5) : 751-753.
- [2] Shevtsov, B. M., (1999) "Backscattering and Inverse Problem in Random Media" ,*Journal of Mathematical Physics*, **40** (9) : 4359-4373.
- [3] Wiener, N. (1938), "The Homogeneous Chaos" , *American Journal of Mathematics*, **60** : 897-936.
- [4] Ghanem, R., and Spanos, P., (1991) *Stochastic Finite Elements : A Spectral Approach*, Springer-Verlag, New York.
- [5] Soize, C., and Ghanem, R. (2003) "Physical Systems with Random Uncertainties : Chaos representations with arbitrary probability measure", *SIAM Journal of Scientific Computing*. (in press)
- [6] C. Desceliers, R. Ghanem and C. Soize (2004) "Maximum Likelihood Estimation of Stochastic Chaos Representation for Experimental Data", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. (Submitted in November 2004)