

# Dynamique transitoire de chocs avec incertitudes aléatoires non homogènes par sous-structuration dynamique

J. Duchereau, Christian Soize

▶ **To cite this version:**

J. Duchereau, Christian Soize. Dynamique transitoire de chocs avec incertitudes aléatoires non homogènes par sous-structuration dynamique. 13ème Colloque Vibrations, Chocs et Bruits, ECL, Jun 2002, Lyon, France. pp.Pages : 1-14. hal-00773304

**HAL Id: hal-00773304**
**https://hal.science/hal-00773304**

Submitted on 12 Jan 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Dynamique transitoire de chocs des structures avec incertitudes aléatoires non homogènes par sous-structuration dynamique

# Transient dynamics induced by shocks in structures with non homogeneous random uncertainties in dynamic substructuring

**Jérôme Duchereau**[*] **— Christian Soize**[**]

[*] *Office National d'Etudes et de Recheches Aérospatiales - DDSS, 92322 Châtillon*
*duchereau@onera.fr*
*doctorant*

[**] *Université de Marne-la-Vallée - LaM, 77454 Marne-la-Vallée cedex 02*
*soize@univ-mlv.fr*
*Professeur des universités*

**RÉSUMÉ.** *Ce papier concerne la prévision par modèle numérique de la réponse dynamique transitoire induite par des chocs sur des structures complexes présentant des incertitudes aléatoires non homogènes. Les méthodes numériques usuelles d'analyse de la dynamique de telles structures dans le domaine BF utilisent des modèles matricels réduits construits à l'aide des premiers modes propres élastiques . La contribution des modes supérieurs, très sensibles aux erreurs de modélisation, mène à la prise en compte des incertitudes aléatoires de modèle et de modélisation. C'est par une approche probabiliste non paramétrique récente que l'on construit un modèle matriciel aléatoire des incertitudes. Ce papier présente l'extension de la méthode non paramétrique au cas de structures complexes modélisées par une méthode de sous-structuration dynamique, où chaque sous-structure possède son propre niveau d'incertitudes. Après un résumé de la théorie et des éléments sur l'analyse numérique, un exemple de prévision des domaines de confiance des réponses transitoires est comparé à des mesures expérimentales. Les résultats donnent une première validation expérimentale de la théorie proposée pour le domaine BF.*
**mots-clefs : dynamique des structures / chocs / incertitudes / méthode probabiliste**

**ABSTRACT.** *This paper examines numerical models for prediction of transient dynamical response induced by shocks upon complex structures with areas of non-homogeneous random uncertainties. The usual numerical methods for analyzing such structures in the LF range employ reduced matrix models using the first elastic modes. The contribution of the higher modes is very sensitive to the modelling errors. Here, a recent non-parametric probabilistic method is applied to build the random uncertainties matrix model. The paper presents the extension of the non-parametric method to the case of complex structures, modelled by a dynamic substructuring method, in which every substructure gets its own uncertainty level. After summarising the theory and giving some elements about numerical analysis, an example of numerical prediction of the confidence bands for transient responses is compared with the experimental measurements carried out. Results provide an experimental validation of the developed model in the LF range.*
**keywords : structural dynamics with shocks / uncertainties / probabilistic method**

## INTRODUCTION

Les phénomènes de dynamique transitoire dans les structures, induits par des chocs, sont des problèmes importants, largement étudiés. On peut en général trouver deux types d'approches. Les approches par la méthode des éléments finis (EF) (voir par exemple [1-3]) ou alors les approches par les méthodes statistiques énergétiques (par exemple [4-7]). On s'intéresse ici aux cas des phénomènes transitoires pour lesquels les premiers modes propres donnent une contribution basse fréquence (BF), et qui nécessitent des modèles numériques de prévision (méthodes numériques EF, voir par exemple [8-9]). Dans ce cadre, on s'intéresse à des structures ayant des zones très hétérogènes (par exemple, un ensemble monté de 2 plaques liées par un couvre-joint boulonné).

Les modèles numériques par la méthode EF de tels systèmes ont de fortes incertitudes induites par la modélisation mécanique (géométrie, conditions aux limites, loi de comportement, etc ...) et par les simplifications utilisées dans le modèle (modèle simplifié d'un assemblage boulonné, par exemple). Afin d'augmenter la robustesse des prévisions, il est nécessaire de modéliser les incertitudes de modèle et de modélisation. En dynamique des structures, la prise en compte des incertitudes est usuellement réalisée par des modèles paramétriques (voir par exemple [10-12]). Une nouvelle approche probabiliste, non paramétrique, basée sur l'utilisation de modèles réduits en dynamique a été proposée récemment [13-14].
Dans le cas des incertitudes non homogènes, l'implémentation du modèle non paramétrique recquiert l'utilisation de la sous-structuration dynamique (par exemple en utilisant la méthode de Craig et Bampton [15]). Dans ce contexte, des travaux ont été réalisés dans le domaine des réponses harmoniques [16-17]. Dans ce travail, on se propose d'étendre l'approche non paramétrique au calcul des réponses transitoires à choc en présence de zones très hétérogènes et de valider le modèle numérique développé en le comparant à une expérimentation [18].
La méthode suivie dans cette recherche comprend le développement d'un modèle moyen par sous-structuration dynamique pour prévoir la réponse dynamique transitoire, l'implémentation du modèle probabiliste construit à partir du modèle moyen, l'analyse des réponses du modèle probabiliste et la comparaison avec les résultats expérimentaux.
Dans une première partie, on présente la formulation du modèle moyen réduit d'un système par sous-structuration dynamique. La seconde partie rappelle le principe de construction d'un modèle non paramétrique d'incertitudes aléatoires pour des matrices symétriques définies positives et l'emploi de simulation de Monte-Carlo pour construire la réponse stochastique. Une troisième partie explicite les méthodes numériques d'analyse des réponses et les critères de convergence du modèle développé. La quatrième partie décrit la configuration expérimentale et le modèle numérique EF moyen qui la modélise. En dernier lieu, les résultats obtenus par l'approche non paramétrique sont confrontés aux résultats expérimentaux pour des chocs sollicitant la bande BF et valident le modèle probabiliste.

## 1. EQUATIONS DU MODELE MOYEN EN SOUS-STRUCTURATION DYNAMIQUE

On s'intéresse à la réponse transitoire d'une structure fixe $\mathbb{S}$ à comportement linéaire faiblement amortie, de frontière $\partial\mathbb{S}$, soumise à une force impulsionnelle extérieure $f_{ext}(t)$. Sur la partie $\partial\mathbb{S}_0$ du bord $\partial\mathbb{S}$ il y a une condition de Dirichlet $u = 0$ en déplacement (voir figure 1).

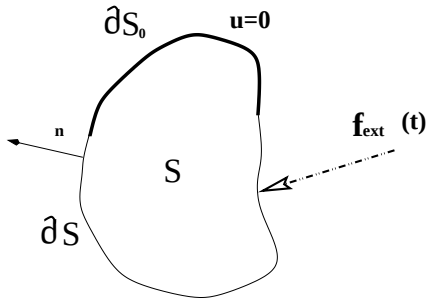



figure 1, schéma de la structure fixe

La méthode de sous-structuration dynamique employée est la méthode de synthèse modale à interface fixe de Craig et Bampton [15]. L'extension au cas d'une structure libre ne pose pas de difficulté.

### 1.1. Equations pour une sous-structure

La structure $\mathbb{S}$ est décomposée en $N_s$ sous-structures $\mathbb{S}^r$ avec $r = 1, ...N_s$. Une ou plusieurs des sous-structures sont fixées sur une partie de leur frontière $\partial\mathbb{S}^r$. Chaque sous-structure possède une interface $\Sigma^r$ avec une ou plusieurs sous-structures (voir figure 2).

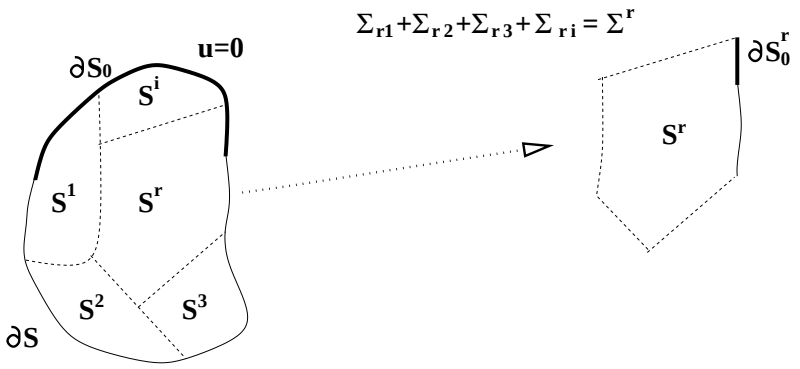



figure 2, décomposition de la structure pour la sous-structuration dynamique

L'équation de la dynamique pour la sous-structure $\mathbb{S}^r$ s'écrit :

$$\begin{aligned}[\underline{\mathbb{M}}^r]\ddot{\underline{\mathbf{U}}}^r(t) + [\underline{\mathbb{D}}^r]\dot{\underline{\mathbf{U}}}^r(t) + [\underline{\mathbb{K}}^r]\underline{\mathbf{U}}^r(t) = \underline{\mathbf{F}}^r(t), \quad t \geq 0 \\ \dot{\underline{\mathbf{U}}}^r(0) = \mathbf{U}_1^r, \quad \underline{\mathbf{U}}^r(0) = \mathbf{U}_0^r,\end{aligned} \tag{1-1}$$

où $\underline{\mathbf{U}}^r(t)$ est le vecteur à valeurs dans $\mathbb{R}^{n^r}$ constitué des $n^r$ degrés de liberté (DDLs), $\underline{\mathbf{F}}^r(t)$ le vecteur des forces externes et de couplage à valeurs dans $\mathbb{R}^{n^r}$ et, $[\underline{\mathbb{M}}^r]$, $[\underline{\mathbb{D}}^r]$ et $[\underline{\mathbb{K}}^r]$ sont les matrices de masse, d'amortissement et de rigidité, symétriques, la matrice $[\underline{\mathbb{M}}^r]$ étant définie positive et les matrices $[\underline{\mathbb{D}}^r]$ et $[\underline{\mathbb{K}}^r]$ étant positives ou définies positives suivant les cas.
Le champ de déplacement admissible d'une sous-structure est écrit comme la somme directe du champ de déplacement admissible avec interface $\Sigma^r$ fixe, et du relèvement statique pour l'interface de couplage $\Sigma^r$ libre. On décompose $\underline{\mathbf{U}}^r(t)$ et $\underline{\mathbf{F}}^r(t)$ en $n_i^r$ DDLs internes et $n_\Sigma = n^r - n_i^r$ DDLs de couplage,

$$\underline{\mathbf{U}}^r(t) = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{U}}_i^r(t) \\ \underline{\mathbf{U}}_\Sigma^r(t) \end{bmatrix}, \quad \underline{\mathbf{F}}^r(t) = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{F}}_i^r(t) \\ \underline{\mathbf{F}}_j^r(t) + \underline{\mathbf{F}}_\Sigma^r(t) \end{bmatrix}, \tag{1-2}$$

où $\underline{\mathbf{F}}_\Sigma^r(t)$ correspond aux forces de couplage sur l'interface de couplage $\Sigma^r$, $\underline{\mathbf{F}}_i^r(t)$ et $\underline{\mathbf{F}}_j^r(t)$ sont dues aux forces extérieures appliquées et

$$[\underline{\mathbb{M}}^r] = \begin{bmatrix} [\underline{\mathbb{M}}_{ii}^r] & [\underline{\mathbb{M}}_{i\Sigma}^r] \\ [\underline{\mathbb{M}}_{i\Sigma}^r]^T & [\underline{\mathbb{M}}_{\Sigma\Sigma}^r] \end{bmatrix}, \quad [\underline{\mathbb{D}}^r] = \begin{bmatrix} [\underline{\mathbb{D}}_{ii}^r] & [\underline{\mathbb{D}}_{i\Sigma}^r] \\ [\underline{\mathbb{D}}_{i\Sigma}^r]^T & [\underline{\mathbb{D}}_{\Sigma\Sigma}^r] \end{bmatrix}, \quad [\underline{\mathbb{K}}^r] = \begin{bmatrix} [\underline{\mathbb{K}}_{ii}^r] & [\underline{\mathbb{K}}_{i\Sigma}^r] \\ [\underline{\mathbb{K}}_{i\Sigma}^r]^T & [\underline{\mathbb{K}}_{\Sigma\Sigma}^r] \end{bmatrix}. \tag{1-3}$$

On considère $N^r$ modes à interface de couplage $\Sigma^r$ fixe pour construire le modèle matriciel réduit moyen pour la sous-structure $\mathbb{S}^r$,

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{U}}_i^r(t) \\ \underline{\mathbf{U}}_\Sigma^r(t) \end{bmatrix} = [\underline{H}^r] \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{q}}^r(t) \\ \underline{\mathbf{U}}_\Sigma^r(t) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [\underline{H}^r] = \begin{bmatrix} [\underline{\Phi}^r] & [\underline{S}_\Sigma^r] \\ 0 & [I_{n_\Sigma}] \end{bmatrix}, \tag{1-4}$$

avec $\underline{\mathbf{q}}^r(t)$ le vecteur des coordonnées généralisées à valeurs dans $\mathbb{R}^{N^r}$, $[\underline{\Phi}^r]$ la matrice réelle $(n_i^r \times N^r)$ dont les colonnes correspondent aux modes à interface de couplage $\Sigma^r$ fixe, $[\underline{S}_\Sigma^r]$ la matrice réelle $(n_i^r \times n_\Sigma^r)$ définie par $[\underline{S}_\Sigma^r] = -[\underline{\mathbb{K}}_{ii}^r]^{-1}[\underline{\mathbb{K}}_{i\Sigma}^r]$ et $[I_{n_\Sigma}]$ la matrice identité $(n_\Sigma^r \times n_\Sigma^r)$. On obtient l'équation du modèle réduit :

$$[\underline{M}^r] \begin{bmatrix} \ddot{\underline{\mathbf{q}}}^r(t) \\ \ddot{\underline{\mathbf{U}}}_\Sigma^r(t) \end{bmatrix} + [\underline{D}^r] \begin{bmatrix} \dot{\underline{\mathbf{q}}}^r(t) \\ \dot{\underline{\mathbf{U}}}_\Sigma^r(t) \end{bmatrix} + [\underline{K}^r] \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{q}}^r(t) \\ \underline{\mathbf{U}}_\Sigma^r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_{N^r}^r(t) \\ \underline{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_\Sigma^r(t) \end{bmatrix}, \tag{1-5}$$

où les matrices réduites $[\underline{M}^r], [\underline{D}^r]$, et $[\underline{K}^r]$ sont telles que

$$[\underline{M}^r] = [\underline{H}^r]^T[\underline{\mathbb{M}}^r][\underline{H}^r], \quad [\underline{D}^r] = [\underline{H}^r]^T[\underline{\mathbb{D}}^r][\underline{H}^r], \quad [\underline{K}^r] = [\underline{H}^r]^T[\underline{\mathbb{K}}^r][\underline{H}^r]. \tag{1-6}$$

On utilise la décomposition suivante par blocs des matrices définies par l'équation (1-6),

$$[A^r] = \begin{bmatrix} [\mathcal{A}_{N^r}^r] & [\mathbb{A}_c^r] \\ \\ [\mathbb{A}_c^r]^T & [\mathbb{A}_\Sigma^r] \end{bmatrix}. \tag{1-7}$$

Le vecteur $\underline{\boldsymbol{\mathcal{F}}}^r_{N^r}(t)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{N^r}$ et le vecteur $\underline{\boldsymbol{\mathcal{F}}}^r_{\Sigma}(t)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{n^r_\Sigma}$ sont définis par

$$\underline{\boldsymbol{\mathcal{F}}}^r_{N^r}(t) = [\underline{\Phi}^r]^T \underline{\mathbf{F}}^r_i(t)\,, \quad \underline{\boldsymbol{\mathcal{F}}}^r_{\Sigma}(t) = [\underline{S}^r_\Sigma]^T \underline{\mathbf{F}}^r_i(t) + \underline{\mathbf{F}}^r_j(t) + \underline{\mathbf{F}}^r_\Sigma(t)\,. \qquad (1-8)$$

### 1.2. Equation pour la structure

Les modèles matriciels réduits des sous-structures sont classiquement assemblés en utilisant la continuité des déplacements et l'équilibre des forces sur les interfaces de couplage.

## 2. MODELE PROBABILISTE NON PARAMETRIQUE

La structure initiale qui présente des zones d'incertitudes de niveaux différents (incertitudes non homogènes) est décomposée en sous-structures de telle façon que le niveau d'incertitude dans chaque sous-structure puisse être considéré comme homogène. Par contre le niveau d'incertitude change d'une sous-structure à une autre. Le modèle probabiliste non paramétrique qui modélise les incertitudes est donc implémenté indépendamment dans chaque sous-structure.

### 2.1. Principe de construction d'un modèle non paramétrique d'incertitudes aléatoires pour chaque sous-structure

Ce modèle probabiliste [13-14] d'incertitudes est dit non paramétrique car les sources d'incertitudes dans le modèle mécanique dues à des incertitudes des paramètres mécaniques, tels que la géométrie, les conditions aux limites, la distribution de masse, les rigidités de liaison, les lois de comportement, etc... ne sont pas modélisées directement par des variables aléatoires ou des champs stochastiques. Ces paramètres incertains impliquent que les matrices généralisées de masse, amortissement et raideur sont des matrices aléatoires. L'approche non paramétrique propose de construire directement un modèle probabiliste de ces matrices aléatoires généralisées pour chaque sous-structure. Soit $\mathbf{U}^r(t)$ le vecteur aléatoire constitué des $n^r$ DDLs de la sous-structure $\mathbb{S}^r$. Le vecteur $\mathbf{U}^r(t)$ peut s'écrire :

$$\mathbf{U}^r(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{U}^r_i(t) \\ \mathbf{U}^r_\Sigma(t) \end{bmatrix} = [\underline{H}^r] \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^r(t) \\ \mathbf{U}^r_\Sigma(t) \end{bmatrix}, \qquad (2-1)$$

où $[\underline{H}^r]$ est la matrice définie par l'équation (1-4), et $\mathbf{Q}^r(t)$ est le vecteur aléatoire des coordonnées généralisées à valeurs dans $\mathbb{R}^{N^r}$. Le processus stochastique $\mathbf{U}^r(t)$ indexé sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{n^r}$ vérifie

$$[\mathbf{M}^r] \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{Q}}^r(t) \\ \ddot{\mathbf{U}}^r_\Sigma(t) \end{bmatrix} + [\mathbf{D}^r] \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{Q}}^r(t) \\ \dot{\mathbf{U}}^r_\Sigma(t) \end{bmatrix} + [\mathbf{K}^r] \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^r(t) \\ \mathbf{U}^r_\Sigma(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\boldsymbol{\mathcal{F}}}^r_N(t) \\ \boldsymbol{\mathcal{F}}^r_\Sigma(t) \end{bmatrix}, \qquad (2-2)$$

où $[\mathbf{M}^r]$ est une matrice aléatoire réduite à valeurs dans l'espace $\mathbb{M}^+_{n^r}(\mathbb{R})$ des matrices réelles $(n^r \times n^r)$ symétriques définies positives $(n^r = N^r + n^r_\Sigma)$ et, $[\mathbf{D}^r]$ et $[\mathbf{K}^r]$ sont des matrices aléatoires à valeurs dans l'espace $\mathbb{M}^+_{n^r}(\mathbb{R})$ ou $\mathbb{M}^{+0}_{n^r}(\mathbb{R})$ des matrices réelles $(n^r \times n^r)$ symétriques positives (suivant le cas). Le vecteur $\underline{\boldsymbol{\mathcal{F}}}^r_{N^r}(t)$ est défini par (1-8) et le vecteur aléatoire $\boldsymbol{\mathcal{F}}^r_\Sigma(t)$ est tel que $\boldsymbol{\mathcal{F}}^r_\Sigma(t) = [\underline{S}^r_\Sigma]^T \underline{\mathbf{F}}^r_i(t) + \underline{\mathbf{F}}^r_j(t) + \mathbf{F}^r_\Sigma(t)$, avec $\mathbf{F}^r_\Sigma(t)$ le vecteur aléatoire des forces de couplage sur l'interface de couplage $\Sigma^r$. Dans ce modèle non paramétrique, l'information principale est constituée par le modèle matriciel réduit moyen et l'on a

$$E\{[\mathbf{M}^r]\} = [\,\underline{M}^r\,], \quad E\{[\mathbf{D}^r]\} = [\,\underline{D}^r\,], \quad E\{[\mathbf{K}^r]\} = [\,\underline{K}^r\,], \qquad (2-3)$$

où $E$ représente l'espérance mathématique. Dans le paragraphe suivant, on rappelle la construction du modèle probabiliste pour les matrices aléatoires $[\mathbf{M}^r]$, $[\mathbf{D}^r]$ et $[\mathbf{K}^r]$.

### 2.2. Modèle probabiliste pour des matrices symétriques définies positives (SDP)

Puisque les matrices réduites de masse, d'amortissement et de rigidité sont des matrices à valeurs dans $\mathbb{M}^+_{n^r}(\mathbb{R})$ ou $\mathbb{M}^{+0}_{n^r}(\mathbb{R})$, le modèle probabiliste développé [13-14] est utilisé. Soit $[\mathbf{A}^r]$ une matrice

aléatoire à valeurs dans $\mathbb{M}_{n^r}^+(\mathbb{R})$ ou $\mathbb{M}_{n^r}^{+0}(\mathbb{R})$ dont la valeur moyenne est $E\{[\mathbf{A}^r]\} = [\underline{\mathbf{A}}^r]$, la matrice $[\mathbf{A}^r]$ représentant la matrice aléatoire réduite de masse, d'amortissement ou de rigidité.
Si la matrice $[\underline{\mathbf{A}}^r]$ est réelle définie positive, il existe une matrice réelle $(n^r \times n^r)$ triangulaire supérieure $[\underline{L}_{A^r}]$ telle que $[\underline{\mathbf{A}}^r] = [\underline{L}_{A^r}]^T[\underline{L}_{A^r}]$, ce qui correspond à la factorisation de Cholesky de la matrice $[\underline{\mathbf{A}}^r]$. La matrice aléatoire $[\mathbf{A}^r]$ peut alors se mettre sous la forme $[\mathbf{A}^r] = [\underline{L}_{A^r}]^T[\mathbf{G}_{A^r}][\underline{L}_{A^r}]$ avec $[\mathbf{G}_{A^r}]$ une matrice aléatoire à valeurs dans $\mathbb{M}_{n^r}^+(\mathbb{R})$ telle que $[\underline{\mathbf{G}}_{A^r}] = E\{[\mathbf{G}_{A^r}]\} = [I_{n^r}]$.
Si la matrice $[\underline{\mathbf{A}}^r]$ est réelle positive, le rang de $[\underline{\mathbf{A}}^r]$ étant de dimension $\mu^r < n^r$ alors il existe une matrice réelle $[\underline{L}_{A^r}]$ de dimension $(\mu^r \times n^r)$ telle que $[\underline{\mathbf{A}}^r] = [\underline{L}_{A^r}]^T[\underline{L}_{A^r}]$. La matrice $[\underline{L}_{A^r}]$ peut, par exemple, être construite à l'aide des vecteurs propres associés aux valeurs propres non nulles de la matrice $[\underline{L}_{A^r}]$, mais il y a d'autres solutions de construction. Dans ce cas la matrice aléatoire $[\mathbf{A}^r]$ peut s'écrire $[\mathbf{A}^r] = [\underline{L}_{A^r}]^T[\mathbf{G}_{A^r}][\underline{L}_{A^r}]$ avec $[\mathbf{G}_{A^r}]$ une matrice aléatoire à valeurs dans $\mathbb{M}_{\mu^r}^+(\mathbb{R})$ telle que $[\underline{\mathbf{G}}_{A^r}] = E\{[\mathbf{G}_{A^r}]\} = [I_{\mu^r}]$.
Soit $\mathbb{M}_n^s(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices réelles $(n \times n)$ symétriques. La distribution de probabilité de la matrice aléatoire $[\mathbf{G}_{A^r}]$ de dimension $(n \times n)$ avec $n = n^r$ ou $\mu^r$, $P_{[\mathbf{G}_{A^r}]} = p_{[\mathbf{G}_{A^r}]}([G])\tilde{dG}$, est définie par la fonction de densité de probabilité $[G] \mapsto p_{[\mathbf{G}_{A^r}]}([G])$ de $\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^+$, par rapport à la mesure $\tilde{dG}$ sur $\mathbb{M}_n^s(\mathbb{R})$ définie par

$$\tilde{dG} = 2^{n(n-1)/4} \prod_{1 \le i \le j \le n} d[G]_{ij}.$$

La fonction de densité de probabilité $p_{[\mathbf{G}_{A^r}]}([G])$ s'écrit [13,14] :

$$p_{[\mathbf{G}_{A^r}]}([G]) = \mathbb{1}_{\mathbb{M}^+(\mathbb{R})}([G]) \times C_{\mathbf{G}_{A^r}} \times (det[G])^{(1-\delta_{A^r}^2)\frac{(n+1)}{2\delta_{A^r}^2}} \times exp\big(-\frac{(n+1)}{2\delta_{A^r}^2} tr[G]\big), \qquad (2-4)$$

avec $C_{\mathbf{G}_{A^r}}$ la constante de normalisation, et $\delta_{A^r} > 0$, le paramètre qui permet de contrôler la dispersion de la matrice aléatoire $[\mathbf{A}^r]$, défini par

$$\delta_{A^r} = \left\{ \frac{E\{\|[\mathbf{G}_{A^r}] - [\underline{\mathbf{G}}_{A^r}]\|_F^2\}}{\|[\underline{\mathbf{G}}_{A^r}]\|_F^2} \right\}^{1/2} \quad \text{tel que} \quad 0 < \delta_{A^r} < \sqrt{\frac{n_0+1}{n_0+5}}, \qquad (2-5)$$

où $n_0$ est un entier fixé tel que $1 \le n_0 \le n^r$ et où $\|[B]\|_F$ est la norme de Frobenius de la matrice $[B]$ telle que $\|[B]\|_F^2 = tr([B][B]^T)$. La dispersion de chaque matrice aléatoire $[\mathbf{M}^r]$, $[\mathbf{D}^r]$ ou $[\mathbf{K}^r]$ est contrôlée par les paramètres $\delta_{M^r}$, $\delta_{D^r}$ ou $\delta_{K^r}$ respectivement, indépendants de $n^r$ et choisis tels que les inégalités définies dans l'équation (2-5) soient vérifiées.

### 2.3. Modèle probabiliste non paramétrique pour le système assemblé

Sur le plan théorique, on montre qu'avec les informations utilisées, les modèles probabilistes des sous-structures sont indépendants [13]. Pour obtenir le modèle probabiliste de la structure assemblée, on procède à l'assemblage algébrique comme pour l'assemblage du modèle moyen. Pour chaque t fixé, le vecteur d'état du système assemblé est le vecteur aléatoire $\mathbf{U}_e = (\mathbf{Q}^1(t), ..., \mathbf{Q}^{N_s}(t), \mathbf{U}_\Sigma(t))$.

## 3. ASPECTS NUMERIQUES ET CRITERES D'ANALYSE

### 3.1. Les observations du système assemblé

Typiquement lors de l'étude d'un choc sur une structure, on s'intéresse aux vibrations transitoires que transmet la structure à ses équipements par le biais de ses systèmes d'attache, afin de le dimensionner. Au lieu de spécifier l'accélération $t \mapsto \ddot{x}_s(t)$ du support de l'équipement, on peut décrire indirectement la fonction $t \mapsto \ddot{x}_s(t)$ en se donnant les réponses maximales que cette accélération produirait sur une famille d'oscillateurs linéaires à 1 DDL, les paramètres de la famille d'oscillateurs étant le taux d'amortissement $\xi$ et la pulsation propre $\omega$. C'est ce que l'on appelle une caractérisation par les spectres de réponse d'oscillateur. Soit un oscillateur

linéaire à 1 DDL soumis uniquement à un déplacement $x_s$ de son support et à des conditions initiales nulles. Le déplacement relatif $x$ de la masse de l'oscillateur par rapport à son support est solution du problème d'évolution

$$\begin{array}{c} M\ddot{x}(t) + D\dot{x}(t) + Kx(t) = -M\ddot{x}_s(t), \quad t \geq 0, \\ x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0. \end{array} \tag{3-1}$$

La force exercée à l'instant $t$ par le ressort sur le support est $f_K(t) = Kx(t)$. En introduisant la pulsation propre $\omega = \sqrt{K/M}$ de l'oscillateur non amorti, le taux de dissipation $\xi = D/(2M\omega)$ où $0 < \xi < 1$, la réponse de ce problème d'évolution s'écrit pour $t \geq 0$,

$$x(t) = -\frac{1}{\omega\sqrt{1-\xi^2}} \int_0^t \ddot{x}_s(u) e^{-\xi\omega(t-u)} \sin\{\omega\sqrt{1-\xi^2}(t-u)\} du. \tag{3-2}$$

La méthode des spectres d'oscillateurs (SO) consiste à caractériser la fonction $t \mapsto \ddot{x}_s(t)$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ par le maximum $x_{max}$ de $t \mapsto x(t)$ pour une famille d'oscillateur $\{0 < \xi < 1,\ 0 < \omega < +\infty\}$. On introduit la fonction $(\xi, \omega) \mapsto S_d(\xi, \omega)$ de $]0,1[ \times ]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par $S_d(\xi, \omega) = max_{\,t \geq 0}\ |x(t)|$, appelée spectre de réponse en déplacement. De même on introduit les spectres de réponse en "pseudo-vitesse" $S_v(\xi, \omega)$ et en "pseudo-accélération" $S_a(\xi, \omega)$ telles que: $S_a(\xi, \omega) = \omega\, S_v(\xi, \omega) = \omega^2\, S_d(\xi, \omega)$.
C'est par cette méthode que seront produites les analyses et les comparaisons entre le modèle numérique développé et l'expérimentation. L'échelle des pseudo-accélérations sera normalisée en $g = 9.81 m.s^{-2}$

### 3.2. Méthode de résolution des équations stochastiques

En présence des incertitudes de modélisation, on a à résoudre un problème d'évolution du second ordre en temps dont les matrices du modèle matriciel réduit sont aléatoires. La réponse transitoire est un processus stochastique en temps et les spectres d'oscillateurs sont des processus stochastiques indexés en fréquence pour un taux de dissipation fixé. On peut écrire formellement la solution stochastique d'un tel problème [13], mais cette solution fait intervenir des intégrales multiples de grande dimension qui ne peuvent être calculées que par la méthode de Monte Carlo. On préfère alors utiliser une méthode directe de simulation de Monte Carlo des équations stochastiques. Chaque tirage des matrices aléatoires du modèle est réalisé selon le modèle probabiliste décrit aux § 2.1 et § 2.2 suivant l'algorithme précisé dans [13-14]. Les réalisations de le réponse transitoire pour les différents tirages sont construites en utilisant une méthode d'intégration numérique pas à pas inconditionnellement stable (méthode de Newmark). Les grandeurs probabilistes décrivant les observations stochastiques sont estimées à l'aide des statistiques mathématiques usuelles de processus.

### 3.3. Critère de convergence du modèle

Afin de déterminer le nombre de modes à conserver ainsi que le nombre de simulations nécessaire pour observer la convergence de la réponse stochastique du modèle probabiliste, on introduit la fonction suivante,

$$(n_{sim}, \nu) \rightarrow C^2_{conv}(n_{sim}, \nu) = \frac{1}{n_{sim}} \sum_{k=1}^{n_{sim}} \int_0^{t_f} \|\mathbf{U}_e(t, \theta_k)\|^2 dt, \tag{3-3}$$

où $\nu = \sum_r N^r$, $t_f$ est l'instant d'arrêt de l'intégration de Newmark, $n_{sim}$ est le nombre de réalisations de Monte Carlo et $\mathbf{U}_e(t, \theta_k)$ est le vecteur $\mathbf{U}_e$ défini au § 2.3 à l'instant $t$ et pour le tirage $\theta_k$.
Dans la simulation du modèle aléatoire, on discutera de la convergence à partir d'un graphique représentant une famille de courbes $\{n_{sim} \mapsto C_{conv}(n_{sim}, \nu)\}_\nu$, permettant de décider des $\nu$ et $n_{sim}$ donnant la convergence du modèle.

### 3.4. Analyse des réponses par spectre d'oscillateur

Pour tous les calculs de SO, on a choisi un taux d'amortissement $\xi = 0.001$. Les pulsations propres $\omega$, seconde caractéristique de la famille d'oscillateurs, doivent être adaptées à la bande de fréquence excitée afin d'obtenir une définition suffisante des SO sur la bande concernée. On utilise le critère suivant de bande passante reliant la plus basse fréquence à observer et le pas entre 2 pulsations propres : $b_{eq} = \pi\xi\omega(1-\xi^2)$. En chaque point d'observation choisi, on extrait la valeur absolue maximale de la "pseudo-accélération" de l'oscillateur $(\xi, \omega)$. Le calcul des SO a été effectué en intégrant l'équation (3-1) par schéma de Newmark. Les résultats du modèle aléatoire sont représentés par un domaine de confiance sur les SO défini par les enveloppes supérieures $SO^+$ et inférieures $SO^-$ des SO correspondant à un niveau de probabilité donné $Pc = 0.95$. Pour une observation donnée et $\xi$ fixé on a le spectre d'oscillateur $s(\omega)$. On construit pour $n_{sim}$ tirages les estimations de $m_1(\omega) = E\{s(\omega)\}$ et $m_2(\omega) = E\{s^2(\omega)\}$, et l'on écrit $\sigma(\omega) = \sqrt{m_2(\omega) - m_1^2(\omega)}$.
On définit ainsi 3 courbes:

$$SO^0(\omega) = log_{10}(m_1(\omega)), \quad \text{la fonction moyenne de la réponse stochastique,}$$

$$SO^+ = log_{10}\big(m_1(\omega) + \frac{\sigma(\omega)}{\sqrt{1-Pc}}\big), \text{l'enveloppe supérieure des SO,}$$

$$\text{et} \quad SO^- = 2SO^0 - SO^+, \quad \text{l'enveloppe inférieure des SO.}$$

## 4. MODELE EXPERIMENTAL ET MODELE NUMERIQUE

### 4.1. Description du modèle expérimental [18]

Il consiste en 1 ensemble suspendu de 2 plaques en Dural de 3mm d'épaisseur liées par un double couvre-joint et excité par une impulsion chargeant une bande BF. La plaque I est de dimension (0.4m x 0.6m), la plaque II de dimension (0.5m x 0.6m). Le couvre-joint se présente comme la jonction des plaques I et II, prise en sandwich par 2 petites plaques (0.14m x 0.6m) de 2mm d'épaisseur, maintenues par 2 lignes de boulons (figure 3). La base de données expérimentale est constituée des accélérations relevées au niveau de 29 capteurs, au cours de 21 essais correspondant à 21 distributions aléatoires des couples de serrage des boulons du couvre-joint (les 21 distributions ayant la même valeur moyenne)[18]. L'ensemble est suspendu par des sandows assurant un filtrage très basse fréquence pour reconstituer les conditions d'une structure libre-libre.

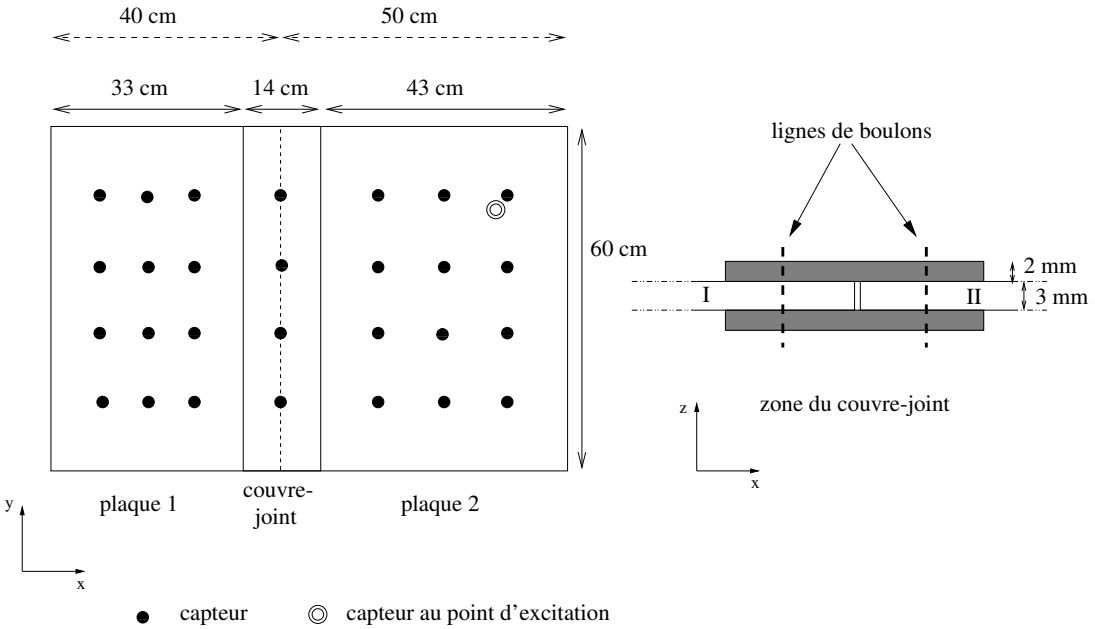



figure 3, géométrie du montage expérimental

Dans une première phase expérimentale, les premiers modes propres de vibration et les taux de dissipation associés ont été mesurés pour la configuration $n^o$19. Ces valeurs expérimentales ont permis de recaler le modèle EF moyen pour les 3 premiers modes. La figure 4 représente la forme temporelle et fréquentielle de l'excitation impulsionnelle expérimentale pour la bande [0-200] Hz.

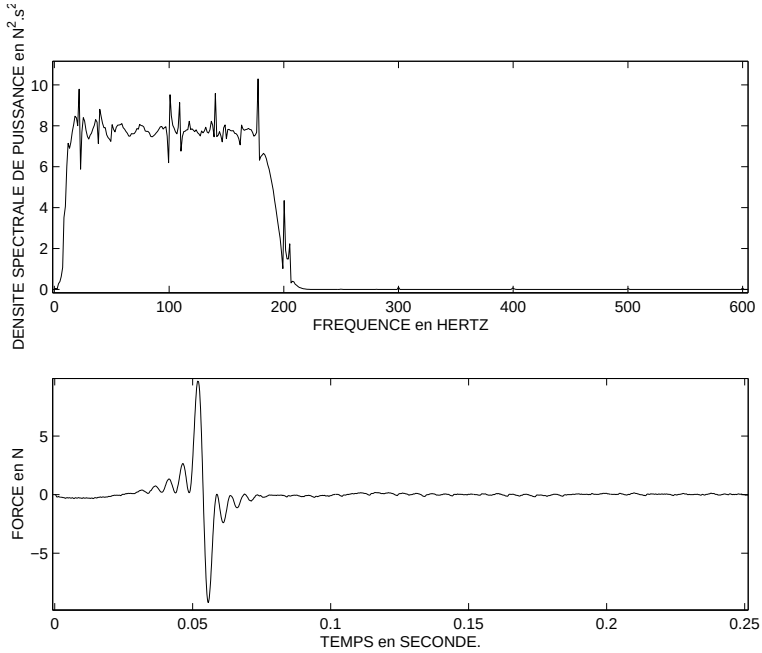



figure 4, excitation bande [0-200] Hz

Les résultats expérimentaux sont traduits sous la forme de SO. Ils sont utilisés pour pouvoir les comparer aux domaines de confiance construits par le modèle stochastique numérique.

## 4.2. Description du modèle numérique

### *4.2.1. Modèle Elements Finis du sytème moyen*

Chaque sous-structure du système moyen est décrite par un modèle élément finis uniforme constitué d'éléments à 4 noeuds dans le plan moyen de la structure. Les hypothèses de comportement de la structure sont celles du modèle de plaque mince de Kirchhoff. Seuls les DDLs de translation (T) perpendiculaire au plan de la plaque et ceux de rotation (R) dans le plan de la plaque sont conservés (soit, si on décrit la plaque au repos dans le plan (xy), les DDLs Tz, Rx et Ry).
La structure est décomposée en 3 sous-structures (figure 3):

- la sous-structure 1, ou plaque 1, est de dimension (0.33m x 0.60m) et se compose de 33 x 60 éléments, soit 6222 DDLs.
- la sous-structure 2, ou couvre-joint, est de dimension (0.14m x 0.60m) et se compose de 14 x 60 éléments, soit 2745 DDLs.
- la sous-structure 3, ou plaque 2, est de dimension (0.43m x 0.60m) et se compose de 43 x 60 éléments, soit 8052 DDLs.

Les plaques 1 et 2 sont d'un matériau isotrope de module d'Young $E = 7.05 \times 10^{10} Pa$.
Par contre, le recalage des 3 premiers modes expérimentaux nous a conduit à décrire le couvre-joint comme une plaque d'un matériau orthotrope dont les caractéristiques sont:

$$E_x = 7.40 \times 10^{10} Pa; \quad E_y = 1.90 \times 10^{10} Pa; \quad G_{xy} = 1.23 \times 10^{10} Pa;$$

### *4.2.2. Modèle de dissipation du sytème moyen*

Les taux d'amortissement $\xi$ mesurés expérimentalement sont relatifs aux premiers modes propres du système. On a fait le choix d'un $\xi$ moyen évalué sur les $\xi_i$ des 12 premiers modes propres

fournis par l'expérimentation, soit $\underline{\xi} = 0.0021$. Un modèle hystérétique a été retenu pour le système moyen,

$$[\underline{\mathbb{D}}] = \eta[\underline{\mathbb{K}}] \quad \text{avec} \quad \eta = \frac{2\underline{\xi}}{\omega_{ref}}$$

et où $\omega_{ref}$ est une fréquence de référence liée à la bande fréquentielle d'analyse.

#### *4.2.3. Définition des observations*

On observe 3 DDLs de translation (Tz) en 3 points du système correspondant aux emplacements de capteurs sur la configuration expérimentale (voir figure 5).

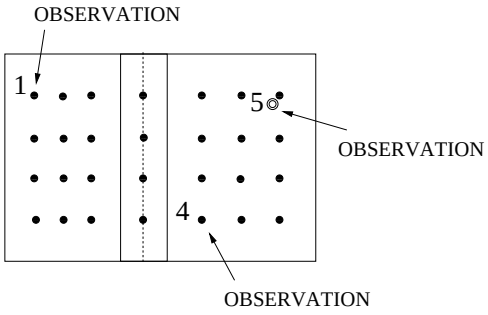



figure 5, points d'observation

#### *4.2.4. Données concernant les paramètres globaux du logiciel*

Le pas de temps $\Delta t$ utilisé dans le schéma d'intégration numérique est égal à celui utilisé au cours de l'expérimentation soit $\Delta t = 1.67 \times 10^{-4} s$. L'excitation impulsionnelle introduite dans le modèle numérique est identique à celle utilisée expérimentalement (voir figure 4).
Le choix des instants auxquels on stoppe l'intégration en temps est optimisé compte tenu de la durée et de la répétition des calculs, au cours des simulations de Monte Carlo. On a choisi un instant d'arrêt $t_f$, pour lequel le niveau de l'enveloppe de la réponse devient inférieur à 10% de son niveau maximum : $t_f = 3.834s$ sur $5.2s$ fourni par l'expérimentation.

## 5. RESULTATS NUMERIQUES

Dans le but de tester le rôle joué par la non-homogénéité des incertitudes (l'incertitude est *a priori* plus grande dans la sous-structure "couvre-joint"), différentes valeurs des coefficients de dispersion $\delta^r$ (représentatifs de la méconnaissance de la structure concernée) ont été choisies.

### 5.1. Incertitudes sur le couvre-joint

Les premiers choix ont consisté à attribuer une forte dispersion sur les matrices d'amortissement et de raideur de la liaison (couvre-joint) pour tenter d'évaluer le niveau d'incertitudes introduit par cette liaison. On a pris $\delta_K^{CJ} = \delta_D^{CJ} = 0.3$ et $\delta_M^{CJ} = 0$ (l'incertitude de masse est quasiment nulle car la masse du couvre-joint dans le modèle est exactement la masse expérimentale).
La simulation de Monte Carlo a été effectuée avec $n_{sim} = 450$ tirages et un nombre total de modes pour les sous-structures $\nu = 28 = 12(N^1) + 1(N^2) + 15(N^3)$. La figure 6 présente les résultats obtenus pour cette configuration. Sur ces figures, le trait plein correspond à la superposition des 21 mesures associées aux 21 tirages. On déduit de ces mesures que, pour une bande d'excitation [0-200] Hz, les incertitudes apportées par le serrage sont complètement négligeables. Les différences entre la réponse du modèle moyen (trait pointillé) et les mesures expérimentales ne peuvent être attribuées au probème du serrage. Sur la figure 6, la région grisée correspond au domaine de confiance à 95% de la réponse aléatoire du système avec le modèle probabiliste non

paramétrique des incertitudes sur le couvre-joint.

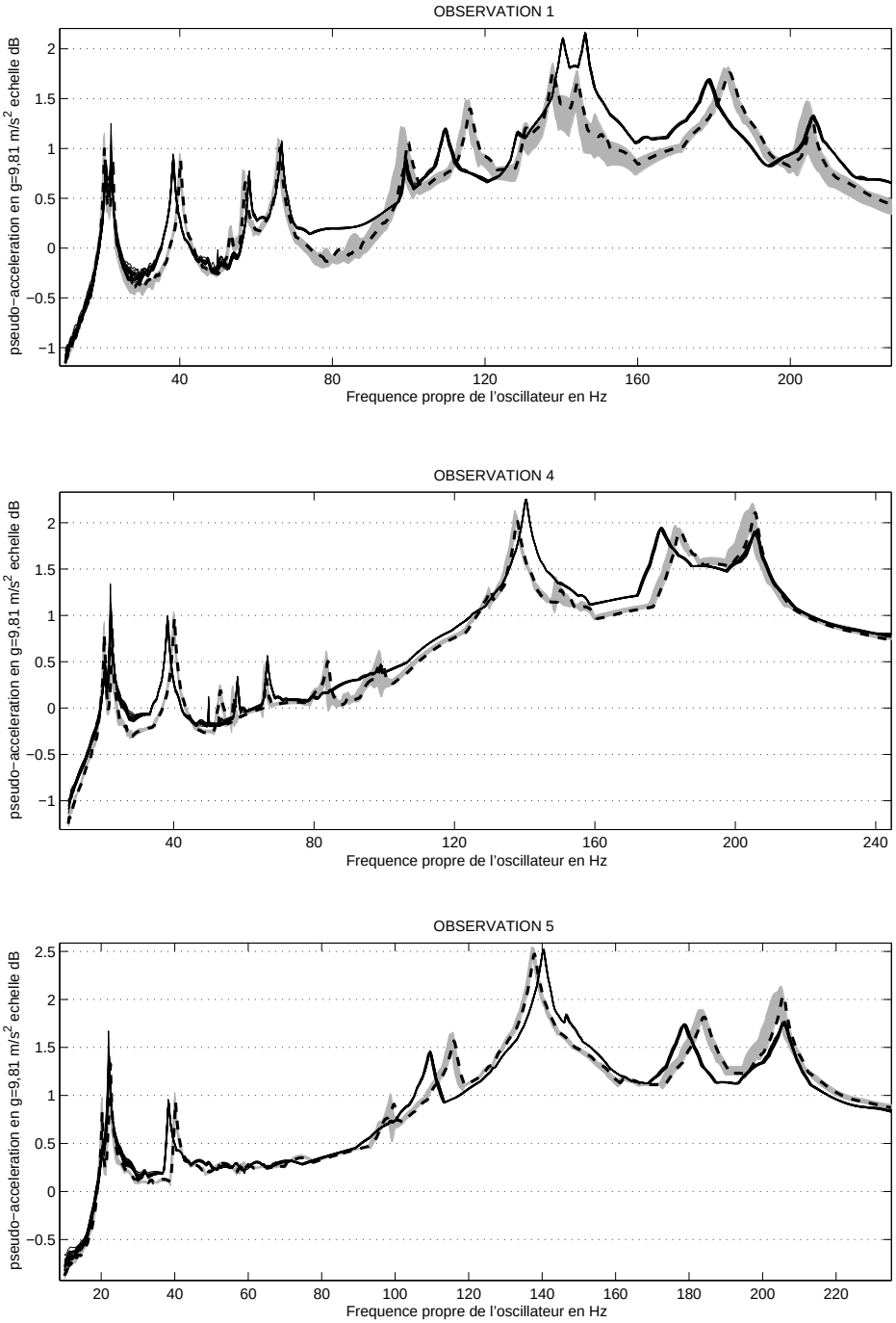



figure 6, spectres d'oscillateurs aux 3 points d'observation 1, 4 et 5
pour une excitation dans la bande [0-200] Hz
avec $\delta_K^{CJ} = \delta_D^{CJ} = 0.3$ et $\delta_M^{CJ} = 0$
-en tirets gras: la réponse du modèle moyen
-en trait plein: les 21 réponses expérimentales
-en grisé: domaine de confiance à 95% de la réponse avec le
modèle probabiliste non paramétrique d'incertitude

Les résultats montrent clairement que la seule incertitude sur le couvre-joint n'est pas suffisante pour expliquer les écarts entre le modèle moyen et l'expérimentation. Il faut noter que les premiers modes propres du couvre-joint encastré se situent au-delà de 1100 Hz et sur [0,200] Hz. Il est nécessaire d'introduire des incertitudes dans les plaques 1 et 2 (objet du § 5.2).

### 5.2. Incertitudes sur le couvre-joint et sur les plaques

On maintient le niveau d'incertitudes dans le couvre-joint et on introduit une incertitudes dans les plaques 1 et 2. Les facteurs de dispersion sont $\delta_K^{CJ} = \delta_D^{CJ} = 0.3$, $\delta_M^{CJ} = 0$ et $\delta_K^{plaques} = 0.15$, $\delta_D^{plaques} = 0.3$, $\delta_M^{plaques} = 0$.
Concernant la simulation numérique de la réponse du modèle probabiliste non paramétrique, on a étudié la convergence vis à vis de la troncature modale (nombre total de modes $\nu$ dans les 3 sous-structures) et le nombre $n_{sim}$ de tirages en utilisant le critère (3-3) défini au § 3.3. La figure 7 montre les résultats de convergence.

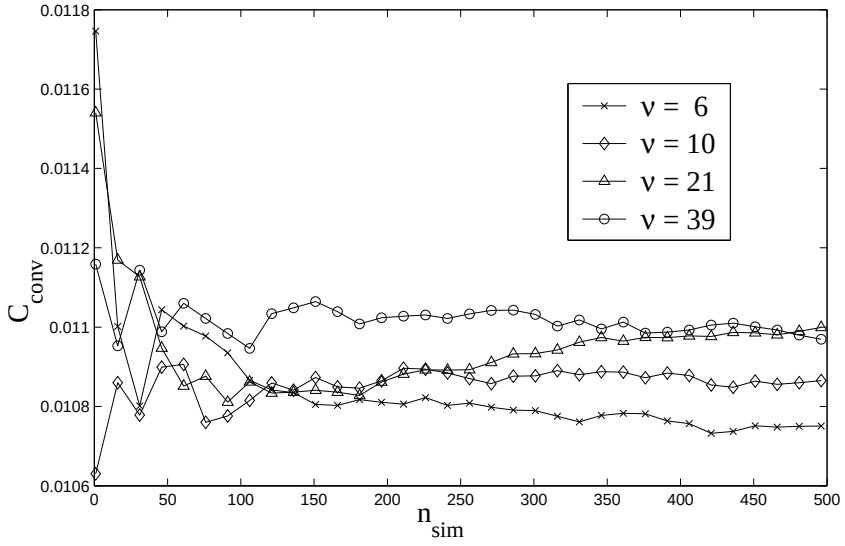



figure 7, convergence de la réponse stochastique en fonction de $n_{sim}$ pour différentes valeurs de $\nu$

On obtient une convergence acceptable pour $\nu = 39 = 17(N^1) + 2(N^2) + 20(N^3)$ (un peu plus grand que nécessaire) et $n_{sim} = 450$.
La figure 8 présente ces résultats pour les 3 observations 1, 4 et 5. Le trait plein représente toujours la superposition des 21 mesures de l'expérimentation, le trait pointillé la réponse du système moyen et la région grisée est le domaine de confiance à 95%. Les graphes montrent que les résultats expérimentaux sont quasiment dans le domaine de confiance qui s'élargit comme la fréquence croît dans la bande [0-200] Hz, ce qui est cohérent. Les résultats pourraient être améliorés en augmentant légèrement l'incertitude de raideur pour les 2 plaques.

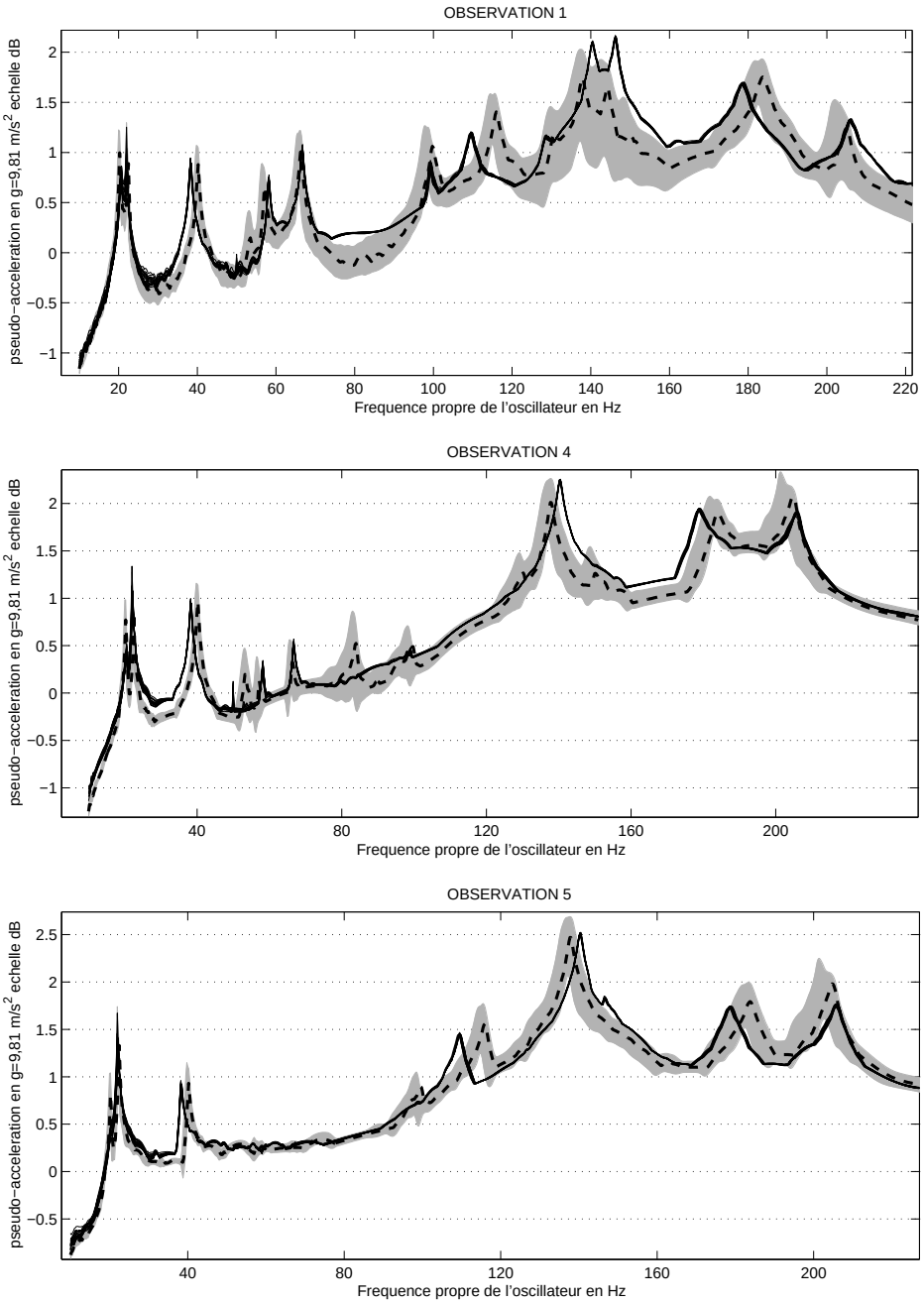



figure 8, spectres d'oscillateurs aux 3 points d'observation 1,4 et 5
pour une excitation dans la bande [0-200] Hz
avec $\delta_K^{plaques} = 0.15$, $\delta_D^{plaques} = 0.3$, $\delta_M^{plaques} = 0$
et $\delta_K^{CJ} = \delta_D^{CJ} = 0.3$, $\delta_M^{CJ} = 0$

-en tirets gras: la réponse du modèle moyen

-en trait plein: les 21 réponses expérimentales

-en grisé: domaine de confiance à 95% de la réponse avec le modèle probabiliste non paramétrique d'incertitude

## CONCLUSION

Sur le plan de la modélisation des incertitudes, les comparaisons modèle - expérimentation montrent la capacité de l'approche probabiliste non paramétrique des incertitudes à prévoir les réponses transitoires induites par un choc dans le domaine BF. Sur le plan mécanique, bien que le modèle EF ait déjà un nombre de DDLs très suffisant pour la bande de fréquence considérée, le modèle moyen conduit à des erreurs significatives dans cette bande de fréquence. Ces erreurs ne peuvent être expliquées uniquement par les incertitudes au niveau du couvre-joint. De plus, les résultats expérimentaux montrent que les incertitudes de serrage ne sont pas significatives dans cette bande de fréquence.

## ANNEXES

### Références


[1] P. K. Roy and N. Ganesan, Transient response of a cantilever beam subjected to an impulse load, Journal of Sound and Vibration, 183(5), 873-890, 1995.

[2] B. Gangadhara Prusty and S. K. Satsangi, Finite element transient dynamic analysis of laminated stiffened shells, Journal of Sound and Vibration, 248(2), 215-233, 2001.

[3] Y. W. Kim and Y.-S. Lee, Transient analysis of ring-stiffened composite cylindrical shells with both edges clamped, Journal of Sound and Vibration, 252(1), 1-17, 2002.

[4] R. J. Pinnington and D. Lednik, Transient statistical energy analysis of an impulsively excited two oscillator system, Journal of Sound and Vibration, 189(2), 249-264, 1996.

[5] R. J. Pinnington and D. Lednik, Transient energy flow between two coupled beams, Journal of Sound and Vibration, 189(2), 265-287, 1996.

[6] F. S. Sui, M. N. Ichchou and L. Jezequel, Prediction of vibroacoustics energy using a discretized transient local energy approach and comparison with TSEA, Journal of Sound and Vibration, 251(1), 163-180, 2002.

[7] E. Dalton, Analysis and Validation Testing of Impulsive Load Response in Complex, Multi-compartimented Structures, AIAA Journal, 759-767, 1995.

[8] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor, The finite element method, 3 vol, 5th edition, John Wiley & Son, 2000.

[9] Bathe and Wilson, Numerical methods in finite element analysis, New-York: Prentice-Hall, 1976.

[10] E. J. Haug, K. K. Choi, V. Komkov., Design sensitivity analysis of structural systems, San Diego: Academic Press, 1986.

[11] P. D. Spanos and R. G. Ghanem., Stochastic finite element expansion for random media, ASCE Journal of Engineering Mechanics, 115(5), 1035-1053, 1989.

[12] O. Dessombz, F. Thouverez, J.P. Laine and L. Jezequel., Analysis of mechanical systems using interval compatibilies applied to finite elements methods, Journal of Sound and Vibration, 239(5), 949-968, 2001.

[13] C. Soize., A nonparametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics, Probabilistic Engineering Mechanics, 15(3), 277-294, 2000.

[14] C. Soize., Maximum entropy approach for modelling random uncertainties in transient elastodynamics, J Acoust Soc Am, 109(5), 1979-96, 2001.

[15] R.R. Craig & M.M.C. Bampton., Coupling of substructures for dynamic analysis, AIAA Journal, 6:1313-1319, 1968.

[16] H. Chebli, C. Soize., Une nouvelle approche de la modélisation des incertitudes de modélisation basée sur le principe du maximum d'entropie, en sous-structuration dynamique des structures, pour le domaine des basses fréquences, 5eme Colloque National en Calcul des Structures, Giens (France), 15-18 mai 2001

[17] C. Soize, H. Chebli., Ramdom uncertainties model in dynamic substructuring a nonparametric probabilistic model, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, to appear in 2002

[18] M. Menelle, P. Barouin., Dynamique transitoire des structures, partie expérimentale, Rapport Technique ONERA 1/05822 DDSS, Août 2001.