

Transformation quadratique d'un processus Gaussien et application à la dynamique stochastique - Quadratic transformation of a Gaussian process and its application to stochastic dynamics

Christian Soize

▶ **To cite this version:**

Christian Soize. Transformation quadratique d'un processus Gaussien et application à la dynamique stochastique - Quadratic transformation of a Gaussian process and its application to stochastic dynamics. Journal de Mécanique, 1976, 15 (5), pp.857–875. hal-00770402

HAL Id: hal-00770402
https://hal.science/hal-00770402

Submitted on 3 Apr 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Transformation quadratique d'un processus Gaussien et application à la dynamique stochastique

par

Christian SOIZE

RÉSUMÉ. — L'objet de ce travail est la dynamique stochastique des structures élastiques à comportement linéaire, soumises au vent aléatoire, en tenant compte des termes non linéaires de la fluctuation du champ de vitesse du vent. La fluctuation de la vitesse du vent est modélisée par un champ stochastique gaussien (V_{tm}) indexé en temps et en espace.

Les fluctuations d'une observation du système à un instant t sont données par

$$D_t = \int_{R \times S} (V_{t'm}^2 + a(m) V_{t'm} + b(m))\, d\mu(t, t', m),$$

où $d\mu$ est la mesure associée à la transformation dynamique du système et $a(m)$ et $b(m)$ sont des fonctions déterministes.

Cette approche nécessite le calcul de la loi conjointe des variables aléatoires associées au processus (V_{tm}) et à la variable de Wishart correspondante en dimension infinie.

Les principes de la méthode sont donnés :

1° pour la détermination de la loi de D_t en explicitant sa fonction caractéristique;

2° pour la détermination de son taux de passage par un niveau donné en explicitant la transformée de Fourier de la loi conjointe de D_t et dD_t/dt.

ABSTRACT. — The studied subject in this paper is the stochastic dynamics of elastic structures with linear behaviour, subjected to random wind loading, taking into account the non-linear terms of velocity field fluctuation.

The fluctuation of wind velocity is a gaussian stochastic field (V_{tm}) indexed in time and in space. The fluctuations of one observation of the system at the time t is

$$D_t = \int_{R \times S} (V_{t'm}^2 + a(m) V_{t'm} + b(m))\, d\mu(t, t', m),$$

where $d\mu$ is the measure associated with the dynamic transformation of the system and $a(m)$, $b(m)$ are deterministic functions.

This approach demands to calculate the conjugate law of the random variable associated with the process (V_{tm}) and of the corresponding Wishart's variable.

The principles of the method are given :

1° for the determination of the D_t law, expliciting its caracteristic function;

2° for the determination of its crossing rate of a given level, expliciting the Fourier's transformation of the conjugate law of D_t and dD_t/dt.

1. Introduction

Dans la couche limite planétaire, le vent est un écoulement d'air turbulent à structure de couche limite. Généralement, les constructions sont soumises aux effets du vent et le constructeur doit connaître les efforts engendrés dans la structure pour la dimensionner.

Ainsi, depuis une quinzaine d'années de nombreuses études théoriques et expérimentales ont été réalisées pour connaître mieux la structure fine du vent au voisinage du sol. A. G. Davenport [2] a été le premier à ajuster un modèle du champ de vitesse du vent en tenant compte de la complexité du phénomène, et à l'appliquer pour déterminer les effets du vent sur les structures élastiques.

Sans entrer dans le détail, nous allons rappeller les caractéristiques principales du champ de vitesse du vent.

Entre le niveau du sol et quelques centaines de mètres de hauteur et sur une courte période de temps T_1 de l'ordre de 10 mn à 1 h, le champ de vitesse du vent $\mathcal{V}(t, m)$, en un point m de l'espace, se décompose en $\mathcal{V}(t, m) = \underline{\mathcal{V}}(m) + v(t, m)$, où $\underline{\mathcal{V}}(m)$ est le champ moyen et $v(t, m)$ la fluctuation due à la turbulence qui est traitée statistiquement. $v(t, m)$ est modélisé par un champ stochastique (V_{tm}), gaussien, centré, du second ordre, indexé en temps et en espace, stationnaire en temps.

La loi de $\underline{\mathcal{V}}(m)$ est connue en fonction de la rugosité du site et d'un vent moyen de référence $\underline{\mathcal{V}}_R$ qui est le paramètre à court terme. Pour une rugosité donnée et un $\underline{\mathcal{V}}_R$ fixé, le champ stochastique (V_{tm}) est complètement décrit; on connaît les expressions de sa fonction de densité spectrale et de sa cohérence, ce qui permet de connaître sa fonction de densité interspectrale. Ceci est suffisant pour décrire ce champ stochastique qui est gaussien, centré et stationnaire en temps. Le paramètre à court terme $\underline{\mathcal{V}}_R$ est en fait une variable aléatoire et il est nécessaire de connaître sa distribution à long terme pour faire des calculs sur une longue période de temps.

Sous les effets de la fluctuation de la vitesse du vent, la structure est excitée dynamiquement. On est donc conduit, pour un $\underline{\mathcal{V}}_R$ donné, à déter-

miner d'une part la réponse moyenne statique sous l'effet du champ de pression moyen et d'autre part, la réponse dynamique autour de la réponse moyenne, due à la fluctuation du champ de pression, ce dernier point étant un problème de dynamique stochastique.

Nous avons étudié dans [9] la dynamique stochastique des structures élastiques à comportement linéaire soumises au vent aléatoire gaussien, en linéarisant le champ de pression en fonction du champ de vitesse. Ici, nous étudions la dynamique stochastique des structures de même type, en tenant compte des termes non linéaires de la fluctuation du champ de pression. La méthode est très différente, car la transformation du champ de vitesse en champ de pression étant non linéaire, la fluctuation du champ de force extérieure appliqué à la structure n'est plus gaussienne et par conséquent il en est de même d'un processus observation.

Les fluctuations du champ de pression sont alors proportionnelles au processus centré

$$Z_{tm} = V_{tm}^2 + a(m)\, V_{tm} + b(m),$$

où $a(m)$ et $b(m)$ sont des fonctions continues et déterministes. Compte tenu de la linéarité du système mécanique, les fluctuations d'une observation du système (contrainte, déplacement, etc.) sont reliées aux processus d'entrée par

$$D_t = \int_{\mathbf{R}\times S} Z_{t'm}\, d\mu(t, t', m),$$

où S est un domaine borné de variation de m, μ la mesure associée à la transformation dynamique par le système mécanique du processus d'entrée. Une telle approche du problème nous oblige à calculer la loi conjointe de la variable aléatoire associée au processus (V_{tm}) et de la variable de Wishart correspondante.

Dans le paragraphe 1, nous posons le problème mécanique. Pour le résoudre, nous avons été conduits à développer une méthode qui est exposée dans le deuxième paragraphe de ce travail. Enfin, dans un troisième paragraphe nous ferons un retour à la mécanique. Nous donnons également le principe de calcul de la loi de D_t, en explicitant sa fonction caractéristique, et de son taux de passage par un niveau donné, en établissant l'expression de la transformée de Fourier de la loi conjointe de D_t et de dD_t/dt.

Nous remercions Paul Krée pour l'aide précieuse qu'il nous a apportée sur le plan théorique.

2. Le problème mécanique

2.1. Analyse déterministe du problème

On considère une construction soumise aux effets du vent.

La résistance de la construction est assurée par une structure repérée dans un système d'axes orthonormés OX'Y'Z'. On suppose la structure élastique, à comportement linéaire, modélisée par un système à n degrés de liberté. Les vibrations linéaires de la structure sont régies par l'équation matricielle

$$\mathrm{M}\ddot{y}+\mathrm{C}\dot{y}+\mathrm{K}\,y=g(t), \tag{1}$$

où M, C, K sont les matrices carrées $(n\times n)$ symétriques réelles de masse, d'amortissement et de rigidité, et où y et g désignent les matrices colonnes $(n\times 1)$ des déplacements des nœuds et des efforts extérieurs appliqués aux nœuds.

Les axes OX'Y'Z' sont choisis de telle manière que OX' soit perpendiculaire à la face au vent et OZ' vertical ascendant. Ceci suppose que la direction du vent moyen sur T_1 est dirigée suivant OX'.

Les seuls efforts extérieurs appliqués à la structure sont ceux du vent. On étudie les vibrations dans le plan parallèle à la direction du vent moyen. Chaque nœud i de la face au vent reprend les efforts de la surface S_i qui lui est associée. On ne considère que les efforts horizontaux suivant OX'; on néglige le couple créé par ces forces si le centre de gravité de S_i ne coïncide pas avec le nœud i. Les efforts de traînée sont pris en compte par le coefficient de traînée globale C_D. Les déplacements de la structure sont faibles et la vitesse de déplacement de cette dernière est faible devant la vitesse du vent. En outre, on néglige l'effet de masse inertielle. On a [9] :

$$g_i(t)=\delta_i\int_{S_i}\frac{1}{2}\rho_a C_D(m)\,\mathscr{V}^2(t,\,m)\,dm,$$

avec $\delta_i=1$ si le nœud i appartient à la face au vent et si i correspond à l'indice d'une force suivant OX', $\delta_i=0$ dans les autres cas, où ρ_a est la masse volumique de l'air, m un point générique de la surface S_i, $\mathscr{V}(m,\,t)$ la composante suivant OX' de la vitesse du vent en un point m et à l'instant t et où $S=\bigcup_i S_i$ avec S surface totale de la face au vent et $S_i\cap S_j=\varnothing$ si $i\neq j$, i et j appartenant à la surface au vent.

Comme nous l'avons dit dans l'introduction, le champ de vitesse se décompose ([2], [9]) en

$$\mathscr{V}(t, m) = \underline{\mathscr{V}}(m) + v(t, m).$$

Soit $\sigma_V^2(m)$ la variance du champ stochastique (V_{tm}) modélisant $v(t, m)$ et soit $b(m)$ la fonction continue définie sur S telle que $b(m) = -\sigma_V^2(m)$. Dans la décomposition qui suit on introduit $b(m)$ afin de centrer le champ stochastique (Z_{tm}) modélisant $z(t, m)$:

$$\mathscr{V}^2(t, m) = \underline{z}(m) + z(t, m),$$

avec

$$\underline{z}(m) = \underline{\mathscr{V}}^2(m) - b(m),$$

$$z(t, m) = v^2(t, m) + 2\underline{\mathscr{V}}(m) v(t, m) + b(m).$$

On considère naturellement la décomposition $g = \underline{g} + f$ avec

$$\underline{g}_i = \delta_i \int_{S_i} \frac{1}{2} \rho_a C_D(m) \underline{z}(m)\, dm,$$

$$f_i = \delta_i \int_{S_i} \frac{1}{2} \rho_a C_D(m) z(t, m)\, dm.$$

La solution de (1) se décompose alors en $y = \underline{y} + x$ avec $\underline{y}$ la solution de $\mathrm{K}\underline{y} = \underline{g}$ que l'on résout classiquement par analyse statique déterministe de la structure et x solution de

$$\mathrm{M}\ddot{x} + \mathrm{C}\dot{x} + \mathrm{K}x = f.$$

En général, la matrice d'amortissement structural C n'est pas connue numériquement et on préfère introduire un taux d'amortissement critique pour chaque mode de vibration. L'analyse modale permet d'expliciter la solution matriciellement

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} \mathrm{H}(t - t') f(t')\, dt',$$

avec

$$\mathrm{H}(t - t') = \Phi h(t - t') \Phi^{\mathrm{T}},$$

Φ la matrice des modes de vibration du système non amorti et normé en masse : $\Phi^T M \Phi = I$, $h(t)$ la matrice diagonale des réponses impulsionnelles : $h_{ij}(t) = \delta_{ij} h_j(t)$ où

$$h_j(t) = \frac{e^{-\xi_j w_j t}}{w_j \sqrt{1-\xi_j^2}} \sin(\sqrt{1-\xi_j^2}\, w_j t),$$

w_j est tel que $[\Phi^T K \Phi]_{ij} = \delta_{ij} w_j^2$ et ξ_j désigne le taux d'amortissement critique du j-ième mode de vibration. L'expression de $h_j(t)$ donnée ci-dessus n'est valable que si $\xi_j < 1$. De plus, $h_j(t) = 0$ si $t \leqq 0$.

Dans cette formulation, on conserve les n modes de vibration; dans la pratique, on ne gardera que les premiers. On s'intéresse à la fluctuation d d'une observation scalaire qui peut être un déplacement, un effort, une contrainte, etc. On définit un opérateur d'observation β qui est une forme linéaire continue sur $\mathbf{R}^n$. On note matriciellement $d(t) = B^T x(t)$, d'où

$$d(t) = B^T \int_{-\infty}^{t} H(t-t') f(t')\, dt'. \tag{2}$$

Remarquons que d'un point de vue numérique, l'état de d à l'instant t n'est pas fonction de tout l'historique, car la structure filtre. La réponse impulsionnelle décroît exponentiellement et au bout d'une durée T après une impulsion, l'effet devient négligeable. On peut calculer facilement T et l'état à l'instant t n'est fonction que de l'historique sur $(t-T, t)$. En général, on peut prendre T très inférieur à T_1. L'expression (2) devient alors

$$d(t) = \int_{t-T}^{t} \sum_{j=1}^{n} \delta_j \int_{S_j} \sum_{i=1}^{n} B_i H_{ij}(t-t') \frac{1}{2} \rho_a C_D(m)\, z(t', m)\, dm\, dt'. \tag{3}$$

La dérivée $\dot{d}(t)$ de $d(t)$ à l'instant t s'écrit, compte tenu du fait que $H(0) = 0$:

$$\dot{d}(t) = B^T \int_{t-T}^{t} \dot{H}(t-t') f(t')\, dt' \tag{4}$$

avec $\dot{H}(u) = dH(u)/du$.

Soit s un point de $\mathbf{R} \times S$ tel que $s = (t', m)$. On définit les fonctions continues $a(s)$ et $b(s)$ sur $S \times \mathbf{R}$ telles que

$$s \to a(s) = 2\underline{\gamma}(m) \qquad \text{et} \qquad s \to b(s) = -\sigma_V^2(m).$$

On peut alors écrire :

$$z(s) = v^2(s) + a(s)\,v(s) + b(s) \tag{5}$$

et les relations (3) et (4) définissent des mesures $\mu(t, s)$ et $\dot{\mu}(t, s)$ telles que

$$d(t) = \int_{\mathbf{R}\times S} z(s)\, d\mu(t, s), \tag{6}$$

$$\dot{d}(t) = \int_{\mathbf{R}\times S} z(s)\, d\dot{\mu}(t, s), \tag{7}$$

pour un T fixé strictement positif.

μ et $\dot{\mu}$ sont identiquement nulles pour tout s n'appartenant pas à $(t-T, t)\times S$.

Du point de vue déterministe, on a donc pour données un champ de vitesse $v(t, m)$ défini sur $\mathbf{R}\times S$, une transformation non linéaire donnant les efforts appliqués aux nœuds : $f_1(t) \ldots f_n(t)$, puis une transformation mécanique linéaire qui filtre des efforts pour donner les déplacements aux nœuds $x_1(t) \ldots x_n(t)$. Enfin, une transformation linéaire donne l'observation $d(t)$ [et sa dérivée temporelle $\dot{d}(t)$]. Supposons pour le moment que : $v(t, m) \in C(\mathbf{R}\times S)$, où $C(\mathbf{R}\times S)$ est l'ensemble des fonctions continues définies sur $\mathbf{R}\times S$; alors la composition de ces trois transformations donne une transformation non linéaire α telle que

$$C(\mathbf{R}\times S) \xrightarrow{\alpha} C(\mathbf{R}), \qquad v(t, m) \mapsto d(t).$$

où $d(t)$ est donné par la formule (6).

2.2. Le problème probabiliste

S est un compact métrisable de $\mathbf{R}^2$. Soit $C(\mathbf{R}\times S)$ l'ensemble des fonctions continues définies sur $\mathbf{R}\times S$, muni de la topologie de la convergence compacte et de la tribu borélienne. Le champ gaussien (V_s) défini sur $\mathbf{R}\times S$ est centré, du second ordre, stationnaire en temps et presque sûrement, ses trajectoires sont continues sur $\mathbf{R}\times S$ (*voir* la démonstration en annexe). Il définit donc une probabilité gaussienne $\mathscr{P}$ sur $C(\mathbf{R}\times S)$, invariante par translation temporelle. L'espace $\Omega = C(\mathbf{R}\times S)$ est donc muni d'une probabilité de Radon invariante par translation temporelle et « on tire au hasard les trajectoires de la vitesse du vent dans Ω suivant la loi $\mathscr{P}$ ». Rappelons que la transformée de Fourier $\hat{\mu}$ d'une probabilité de Radon μ sur un espace

localement convexe séparé X définit une application injective : $\mu \to \hat{\mu}$ de X dans son dual X'. D'autre part, l'application α de $C(\mathbf{R}\times S)$ dans $C(\mathbf{R})$ (défini au paragraphe 2.1) est continue.

Dans ces conditions, $C(\mathbf{R})$ peut être muni de la topologie de convergence compacte et de la tribu borélienne. On connaît la transformée de Fourier $\hat{\mathscr{P}}$ de la probabilité $\mathscr{P}$ et nous cherchons la transformée de Fourier $\hat{W}$ de la probabilité $W = \alpha(\mathscr{P})$ sur $C(\mathbf{R})$. Alors le processus (D_t) est complètement décrit, puisque l'on peut prendre $\Omega = C(\mathbf{R})$ muni de la probabilité W.

Pour s fixé, $v(s)$ et $z(s)$ sont des variables aléatoires que nous notons V_s et Z_s. De même pour t fixé, $d(t)$ et $\dot{d}(t)$ sont des variables aléatoires notées D_t et $\dot{D}_t$.

3. Transformation quadratique d'un processus gaussien

3.1. Préliminaires et notations

Soit S un compact métrisable, $C(\mathbf{R}\times S)$ l'espace des fonctions continues définies sur $\mathbf{R}\times S$. On munit $C(\mathbf{R}\times S)$ de la topologie de la convergence uniforme compacte et de la tribu borélienne. On note $M(\mathbf{R}\times S)$ son dual topologique.

Soit $(V_s)_s$ un champ gaussien indexé sur $\mathbf{R}\times S$, réel, du second ordre, centré, de loi de probabilité $\mathscr{P}$ sur $C(\mathbf{R}\times S)$ invariante par translation temporelle.

On cherche la loi de probabilité du champ $(Z_s)_s$ indexé sur $\mathbf{R}\times S$ et tel que

$$Z_s = V_s^2 + a(s)\,V_s + b(s),$$

où $a(s)$ et $b(s)$ sont des fonctions continues, bornées, déterministes, définies sur $\mathbf{R}\times S$.

A la loi $\mathscr{P}$ est associé l'opérateur de covariance C de $M(\mathbf{R}\times S)$ dans $C(\mathbf{R}\times S)$. L'opérateur C est symétrique; il est supposé injectif.

$$(8)\qquad \begin{cases} \forall \mu_1 \quad \text{et} \quad \mu_2 \in M(\mathbf{R}\times S), \\ (C\mu_1, \mu_2) = \mathscr{E}\displaystyle\int_{\mathbf{R}\times S}\int_{\mathbf{R}\times S} V_s V_{s'}\, d\mu_1(s)\, d\mu_2(s'), \end{cases}$$

où $\mathscr{E}$ désigne l'espérance mathématique.

L'expression (8) définit un produit scalaire sur $M(\mathbf{R}\times S)$ et soit X le complété de cet espace préhilbertien séparé, X étant identifié à son dual. En [8] L. Schwartz a montré que la transposée j' de l'injection canonique j de $M(\mathbf{R}\times S)$ dans X envoie X dans $C(\mathbf{R}\times S)$. Cette injection canonique j' de X dans $C(\mathbf{R}\times S)$ est continue et transforme la probabilité cylindrique gaussienne canonique centrée ν sur X en $\mathscr{P} : \mathscr{P} = j'(\nu)$.

De plus, $C = j' \circ r \circ j$, avec r l'isomorphisme de Riesz de X sur son dual X :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j'} & C(\mathbf{R}\times S) \\ \uparrow{\scriptstyle r} & & \uparrow{\scriptstyle c} \\ X & \xleftarrow{j} & M(\mathbf{R}\times S) \end{array}$$

Soit E un espace vectoriel réel et E′ sont dual. On note $E \otimes E$ et $E \odot E$ la deuxième puissance tensorielle ordinaire et symétrique de E. Soient E et F deux espaces de Banach. Le produit tensoriel projectif complété noté $E \hat{\otimes} F$ est l'espace de Banach complété de $E \otimes F$ pour la norme π qui est telle que

$$\| u \|_\pi = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} \| x_i \| \| y_i \| \right\} \qquad \text{avec} \quad u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i.$$

Le « inf » est pris sur toutes les suites finies $\{ x_i y_i \}$ pour $i \in \{ 1, n \}$ dans $E \times F$. Si $u = x \otimes y$, alors : $\| u \|_\pi = \| x \| \| y \|$.

Pour les définitions et propriétés relatives aux processus linéaires et aux probabilités cylindriques, *voir* [6].

3.2. Transformée de fourier de la loi de (Z_s)

Nous commencerons par la démonstration du théorème suivant :

Théorème. — *Soit* ρ *l'application identique de* $C(\mathbf{R}\times S)$. *Alors la transformée de Fourier* $\hat{U}$ *de la loi conjointe des variables aléatoires* $\rho \otimes \rho$ *et* ρ *à valeurs dans* $C_{sym}(\mathbf{R}^2 \times S \times S)$ *et* $C(\mathbf{R}\times S)$ *s'écrit :* $\forall\, x \in M(\mathbf{R}\times S)$ *et* $\forall\, \theta \in M_{sym}(\mathbf{R}^2 \times S \times S)$,

$$(9) \quad \hat{U}(\theta, x) = \det(1 + 2i\theta C)^{-1/2} \exp\left\{ -\frac{1}{2} (C(1+2i\theta C)^{-1} x, x) \right\},$$

où $\det(1+2i\theta C)$ *est le déterminant de Fredholm de* $\theta \circ C$ *au point* $-2i$.

Démonstration. — Soit R un processus linéaire quelconque de X dans $L^2(\Omega)$, de la classe d'isonomie de ν. On définit l'application bilinéaire continue :

$$X \times X \to L^1(\Omega), \qquad u, v \mapsto R\,u \,.\, R\,v.$$

Cette application se factorise, compte tenu de la propriété universelle du produit tensoriel symétrique, par l'application bilinéaire notée $R \odot R$ de $X \odot X$ dans $L^1(\Omega)$. Vu la propriété universelle de la topologie π, cette application se prolonge à $X \hat{\odot} X$.

Le processus linéaire $R \circ j$ sur $M(\mathbf{R} \times S)$ est décomposé par la variable aléatoire ρ, ρ étant l'application identique de $C(\mathbf{R} \times S)$ puisque nous avons pris $\Omega = C(\mathbf{R} \times S)$.

D'autre part, notons w la probabilité cylindrique sur $X \odot X$ associée au processus linéaire $R \odot R$ continu, défini sur $X \hat{\odot} X$ à valeurs dans $L^1(\Omega)$ (en fait, w est la probabilité cylindrique de Wishart, canonique à un degré de liberté et relative à X, *cf.* la note de J. L. Soler [11]). Compte tenu du fait que la transformation non linéaire $\varphi \to \varphi \otimes \varphi$ est continue de $C(\mathbf{R} \times S)$ dans $C_{sym}(\mathbf{R}^2 \times S \times S)$, l'image de w par l'injection canonique i' de $X \odot X$ dans $C_{sym}(\mathbf{R}^2 \times S \times S)$ est une vraie probabilité. $M_{sym}(\mathbf{R}^2 \times S \times S)$ et $C_{sym}(\mathbf{R}^2 \times S \times S)$ sont en dualité. La transposée i de i' est une injection de $M_{sym}(\mathbf{R}^2 \times S \times S)$ dans $X \hat{\odot} X$ et le processus linéaire $(R \odot R) \circ (i)$ basé sur $M_{sym}(\mathbf{R}^2 \times S \times S)$ est décomposé par la variable aléatoire $\rho \otimes \rho$.

On considère le schéma

$$X \odot X \times X \xrightarrow{(i', j')} C_{sym}(\mathbf{R}^2 \times S \times S) \times C(\mathbf{R} \times S)$$

$$L^1(\Omega) \xleftarrow{(R \odot R,\, R)} X \hat{\odot} X \times X \xleftarrow{(i,\, j)} M_{sym}(\mathbf{R}^2 \times S \times S) \times M(\mathbf{R} \times S)$$

Le processus linéaire U basé sur $M_{sym}(\mathbf{R}^2 \times S \times S) \times M(\mathbf{R} \times S)$ qui apparaît sur le schéma ci-dessus est défini par

$$\begin{array}{ccc} M_{sym}(\mathbf{R}^2 \times S \times S) \times M(\mathbf{R} \times S) & \xrightarrow{U} & L^1(\Omega) \\ \theta \qquad\qquad\qquad x & \mapsto & (R \odot R) \circ (i)(\theta) + (R \circ j)(x) \end{array}$$

et dont la transformée de Fourier s'écrit :

$$\hat{U}(\theta, x) = \mathscr{E}\{\exp\{-i\{(R \odot R) \circ (i)(\theta) + (R \circ j)(x)\}\}\}.$$

Comme le processus $R \circ j$ est décomposé par la variable aléatoire ρ et $(R \odot R) \circ (i)$ par la variable aléatoire $\rho \otimes \rho$, on a

$$\hat{U}(\theta, x) = \mathscr{E}\{\exp\{-i\{(\theta, \rho \otimes \rho) + (x, \rho)\}\}\}.$$

Notons que la transformée de Fourier $\hat{U}$ de U est continue. Pour calculer explicitement $\hat{U}$, on suppose que $\theta \in M(\mathbf{R}\times S) \odot M(\mathbf{R}\times S)$, puis on fait un prolongement continu pour $\theta \in M_{sym}(\mathbf{R}^2 \times S \times S)$.

Soit X_i un sous-espace de dimension finie de $M(\mathbf{R}\times S)$ et tel que $\theta \in X_i \odot X_i$. La restriction l de j à X_i est un isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} X & \overset{j}{\rightleftarrows} & M(\mathbf{R}\times S) \\ \uparrow & & \uparrow \\ X_i & \xleftarrow{\quad l \quad} & X_i \end{array}$$

En transposant, on obtient un isomorphisme de X_i dans $C(\mathbf{R}\times S)/X_i^{\perp}$ où $X_i^{\perp}$ est l'orthogonal de X_i dans $C(\mathbf{R}\times S)$:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad j' \quad} & C(\mathbf{R}\times S) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_i & \xrightarrow{l'} & C(\mathbf{R}\times S)/X_i^{\perp} \simeq X_i \end{array}$$

Soit $\{ e_1 \ldots e_q \}$ une base orthonormée de X_i de dimension q. Alors, on peut construire une base orthornormée de $X_i \odot X_i$ de la manière suivante :

$$e_k \odot e_j = \begin{cases} e_k \otimes e_k & \text{si} \quad k = j, \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}(e_k \otimes e_j + e_j \otimes e_k) & \text{si} \quad k < j. \end{cases}$$

La restriction des processus linéaires $R \circ j$ et $(R \odot R) \circ (i)$ aux sous-espaces de dimension finie X_i et $X_i \odot X_i$ est respectivement décomposée par les variables aléatoires ρ_i et $\rho_i \otimes \rho_i$ ayant pour composante sur la base : $\{ e_1, \ldots e_q \} : \rho_i^1, \ldots \rho_i^q$.

D'autre part, on a l'opérateur de covariance C_i de X_i dans X_i tel que

$$\begin{array}{ccc} X_i & \xrightarrow{l'} & C(\mathbf{R}\times S)/X_i^{\perp} \simeq X_i \\ \downarrow{\scriptstyle I_d} & & \uparrow{\scriptstyle C_i} \\ X_i & \xleftarrow{\quad l \quad} & X_i \end{array}$$

On note C_q la matrice associée à l'opérateur C_i. Ses composantes sont

$$\{ C_q \}_{kj} = (C e_k, e_j) = \mathscr{E}\{ (e_k, \rho)(e_j, \rho) \} = \mathscr{E}\{ \rho_i^k \rho_i^j \}.$$

En décomposant θ sur la base $e_k \odot e_j$, on obtient :

$$\theta = \sum_{k,j} \theta_{kj} e_k \otimes e_j = \sum_k \theta_{kk} e_k \otimes e_k + \sqrt{2} \sum_{k<j} \theta_{kj} e_k \odot e_j ,$$

d'où

$$(\theta, \rho \otimes \rho) = \sum_k \theta_{kk} (\rho_i^k)^2 + 2 \sum_{k<j} \theta_{kj} \rho_i^k \rho_i^j = (\Theta \rho_i, \rho_i).$$

En notant Θ la matrice d'élément $\Theta_{kj} = \theta_{kj}$.

Soit x_i le vecteur de composante $x_i^1, \ldots, x_i^q$, sur la base e_i^j; on a

$$\hat{U}(\theta, x) = \int_{\mathbf{R}^q} (2\pi)^{-q/2} (\det C_q)^{-1/2} \times \exp\left\{ -i \{ (\Theta \rho_i, \rho_i) + (x_i, \rho_i) \} - \frac{1}{2} (C_q^{-1} \rho_i, \rho_i) \right\} d\rho_i,$$

avec $d\rho_i = d\rho_i^1 \times \ldots \times d\rho_i^q$.

Notons que la matrice $[2i\Theta + C_q^{-1}]$ symétrique, non réelle, n'est pas diagonalisable dans le cas général. Pour effectuer l'intégration sur $\mathbf{R}^q$, nous utilisons les étapes de calcul suivantes :

C_q est définie positive symétrique. Il en est de même de C_q^{-1} qui s'écrit par la décomposition de Chowlesky : $C_q^{-1} = LL^T$, avec L la matrice réelle triangulaire (T en exposant signifie la transposition matricielle et $-T$ la transposition de l'inverse); d'où

$$([2i\Theta + C_q^{-1}] \rho_i, \rho_i) = ([2i L^{-1} \Theta L^{-T} + I] L^T \rho_i, L^T \rho_i),$$

I désigne la matrice unité. On fait le changement de base $\rho_i = L^{-T} y$ qui donne

$$\hat{U}(\theta, x) = \int_{\mathbf{R}^q} (2\pi)^{-q/2} (\det C_q)^{-1/2} (\det L)^{-1} \times \exp\left\{ -i (x_i, L^{-T} y) - \frac{1}{2} ([2i L^{-1} \Theta L^{-T} + I] y, y) \right\} dy.$$

La matrice $L^{-1} \Theta L^{-T}$ est symétrique réelle. Il existe une matrice unitaire Ψ qui la diagonalise. On fait le nouveau changement de base $y = \Psi t$ et on obtient :

$$\hat{U}(\theta, x) = \int_{\mathbf{R}^q} (2\pi)^{-q/2} (\det C_q)^{-1/2} (\det L)^{-1} \times \exp\left\{ -i (p, t) - \frac{1}{2} ([I + 2i\Lambda] t, t) \right\} dt,$$

avec $p = \Psi^T L^{-1} x_i$ et $\Lambda_{kj} = \delta_{kj} \lambda_j$ où λ_j sont les valeurs propres de $L^{-1} \Theta L^{-T}$. On peut alors intégrer, s'assurer de la convergence et tous calculs faits, on obtient :

$$\hat{U}(\theta, x) = \det(I+2i\Theta C_q)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(C_q[I+2i\Theta C_q]^{-1} x_i, x_i)\right\}.$$

Par conséquent, pour tout $\theta \in M(\mathbf{R}\times S) \odot M(\mathbf{R}\times S)$ et $x \in M(\mathbf{R}\times S)$:

$$\hat{U}(\theta, x) = \det(1+2i\theta C)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(C(1+2i\theta C)^{-1} x, x)\right\},$$

qui se prolonge par continuité à $\theta \in M_{sym}(\mathbf{R}^2\times S\times S)$. D'autre part, $\hat{U}(\theta, x)$ est continue et le terme en exponentielle du membre de droite de l'expression ci-dessus est continu. Par conséquent, $\det(1+2i\theta C)$ est continue et on peut lui donner un sens. Néanmoins, on peut l'interpréter comme le déterminant de Fredholm de l'élément $u = \theta \circ C$ au point $-2i$ (*cf.* A. Grothendieck [3]).

COROLLAIRE. — *Pour tout* μ *appartenant à* $M(\mathbf{R}\times S)$ *on définit l'opérateur* $\tilde{\mu}$ *de* $C_{sym}(\mathbf{R}^2\times S\times S)$ *dans* $\mathbf{R}$ *tel que*

$$\forall \varphi \in C_{sym}(\mathbf{R}^2\times S\times S) : \quad \varphi(s, s') \mapsto \int_{\mathbf{R}\times S} \varphi(s, s)\, d\mu(s).$$

Alors la transformée de Fourier $\hat{Q}$ *de la loi* Q *du champ stochastique* $Z_s = V_s^2 + a(s) V_s + b(s)$ *s'écrit :* $\forall \mu \in M(\mathbf{R}\times S)$;

$$\hat{Q}(\mu) = \det(1+2i\tilde{\mu}C)^{-1/2} \times \exp\left\{-i(\mu, b) - \frac{1}{2}(C(1+2i\tilde{\mu}C)^{-1}\mu a, \mu a)\right\}. \tag{10}$$

Le théorème précédent donne la transformée de la loi conjointe de $\rho \otimes \rho$ et ρ. Pour déterminer la loi de (Z_s) qui fait intervenir ρ^2 et non pas $\rho \otimes \rho$, nous devons faire intervenir l'opérateur de restriction à la diagonale que nous noterons Δ.

L'opérateur Δ est continu de $C_{sym}(\mathbf{R}^2\times S\times S)$ dans $C(\mathbf{R}\times S)$ et tel que

$$C_{sym}(\mathbf{R}^2\times S\times S) \xrightarrow{\Delta} C(\mathbf{R}\times S),$$
$$\varphi(s, s') \mapsto \varphi(s, s),$$
$$M_{sym}(\mathbf{R}^2\times S\times S) \xleftarrow{\Delta'} M(\mathbf{R}\times S).$$

L'opérateur Δ' transposé de Δ est tel que

$$\forall \mu \in M(\mathbf{R} \times S) \quad \text{et} \quad \varphi \in C_{sym}(\mathbf{R}^2 \times S \times S),$$

$$(\Delta' \mu, \varphi) = (\mu, \Delta\varphi) = \int_{\mathbf{R} \times S} \varphi(s, s)\, d\mu(s).$$

On pose $\Delta' \mu = \tilde{\mu}$ qui est tel que

$$C_{sym}(\mathbf{R}^2 \times S \times S) \xrightarrow{\tilde{\mu}} \mathbf{R}, \quad \varphi(s, s') \mapsto \int_{\mathbf{R} \times S} \varphi(s, s)\, d\mu(s).$$

Soit A l'application linéaire continue de $C_{sym}(\mathbf{R}^2 \times S \times S) \times C(\mathbf{R} \times S)$ dans $C(\mathbf{R} \times S)$ défini par

$$C_{sym}(\mathbf{R}^2 \times S \times S) \times C(\mathbf{R} \times S) \xrightarrow{A} C(\mathbf{R} \times S)$$

$$\varphi \otimes \varphi, \qquad \gamma \qquad \mapsto \Delta(\varphi \otimes \varphi) + \gamma a.$$

La variable aléatoire $Q = A(\rho \otimes \rho, \rho) + b$ a pour transformée de Fourier :

$$\forall \mu \in M(\mathbf{R} \times S), \quad \hat{Q}(\mu) = e^{-i(\mu, b)} \hat{U}(A' \mu),$$

où $\hat{U}$ est donnée par (9) et où A' est l'opérateur transposé de A, linéaire continu de $M(\mathbf{R} \times S)$ dans $M_{sym}(\mathbf{R}^2 \times S \times S) \times M(\mathbf{R} \times S)$, ce qui donne : $\forall \mu \in M(\mathbf{R} \times S)$,

$$\hat{Q}(\mu) = \det(1 + 2i\tilde{\mu} C)^{-1/2} \exp\left\{ -i(\mu, b) - \frac{1}{2}(C(1 + 2i\tilde{\mu} C)^{-1} \mu a, \mu a) \right\}$$

et ce qui achève la démonstration du corollaire.

4. Retour au problème mécanique et conclusions

Nous avons établi dans le deuxième paragraphe la transformée de Fourier $\hat{Q}$ de la loi Q du champ stochastique (Z_s). Le processus stochastique (D_t), stationnaire, est complètement décrit par sa loi de probabilité W sur $C(\mathbf{R})$ invariante par translation temporelle et dont la transformée de Fourier $\hat{W}$ est sur $M(\mathbf{R})$. On peut exprimer facilement $\hat{W}$ en fonction de $\hat{Q}$. Néanmoins, ne voulant pas faire d'autres transformations temporelles sur le processus (D_t), nous nous intéresserons à la loi de la variable

aléatoire D_T pour un instant $t = T$ donné quelconque puisque (D_t) est stationnaire. De même, nous chercherons la loi conjointe des variables aléatoires D_T et $\dot{D}_T$ qui permet de calculer le taux de passage par un niveau donné.

4.1. Loi conjointe des variables aléatoires D_T et $\dot{D}_T$

Soit P cette loi conjointe. Les formules (6) et (7) définissent une application linéaire continue β de $C(\mathbf{R}\times S)$ dans $\mathbf{R}^2$ telle que

$$Z_s \to \begin{pmatrix} D_T \\ \dot{D}_T \end{pmatrix}.$$

La transformée de Fourier $\hat{P}$ de P est telle que

$$\forall y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2, \qquad \hat{P}(y) = \hat{Q}(\beta' y),$$

où β' est l'opérateur transposé de β, linéaire continu de $\mathbf{R}^2$ dans $M(\mathbf{R}\times S)$ et $\hat{Q}$ donné par (10). Un calcul simple montre que $\beta' y = y_1 \mu + y_2 \dot{\mu}$ et par conséquent $\forall y \in \mathbf{R}^2$:

$$(11) \qquad \hat{P}(y) = \det(1+2i\tilde{M}C)^{-1/2} \times \exp\left\{-i(M, b) - \frac{1}{2}(C(1+2i\tilde{M}C)^{-1} M a, M a)\right\},$$

avec

$$\tilde{M} = y_1 \tilde{\mu} + y_2 \tilde{\dot{\mu}} \qquad \text{et} \qquad M = y_1 \mu + y_2 \dot{\mu}.$$

On obtient la loi P par transformée de Fourier inverse de $\hat{P}(y)$.

4.2. Loi de la variable aléatoire D_T

La transformée de Fourier de la loi de la variable aléatoire D_T se déduit facilement de la relation (11) en faisant $y_2 = 0$. On obtient alors :

$$(12) \quad \begin{cases} \forall y_1 \in \mathbf{R}, \\ \hat{P}(y_1) = \det(1+2iy_1\tilde{\mu}C)^{-1/2} \\ \qquad \times \exp\left\{-iy_1(\mu, b) - \frac{1}{2}y_1^2(C(1+2iy_1\tilde{\mu}C)^{-1}\mu a, \mu a)\right\}. \end{cases}$$

La loi P de D_T s'obtient alors par transformée de Fourier inverse.

4.3. Taux de passage par un niveau donné du processus $(D_t)_t$

Le processus $(D_t)_t$ a ses trajectoires presque sûrement continues sur **R** et est stationnaire. Soit $N(a, T_1)$ le nombre de passages croissant par le niveau a pendant le temps T_1. Alors, en supposant que

$$\int_0^{+\infty} \dot{y} p(a, \dot{y})\, d\dot{y} < +\infty$$

avec $p(y, \dot{y})$ la densité de la loi conjointe des variables aléatoires D_T et $\dot{D}_T$.

On a [7] :

$$\mathscr{E}\{N(a, T_1)\} = \int_0^{T_1} dt \int_0^{+\infty} \dot{y} p(a, \dot{y})\, d\dot{y},$$

soit

$$\mathscr{E}\{N(a, T_1)\} = T_1 \int_0^{+\infty} \dot{y} p(a, \dot{y})\, d\dot{y}.$$

Plusieurs techniques numériques peuvent être envisagées pour calculer $\mathscr{E}\{N(a, T_1)\}$. Nous en citerons deux :

– la première consiste à déterminer directement $p(y, \dot{y})$ par transformation de Fourier inverse de $\hat{p}(y_1, y_2)$ donnée par la relation (11) et à intégrer ensuite un $\dot{y}$;

– la deuxième consiste à exprimer directement $\mathscr{E}\{N(a, T_1)\}$ en fonction de $\hat{p}(y_1, y_2)$. Cette méthode nécessite l'emploi des techniques développées par P. Krée et P. Met [4] et qui font intervenir les transformées de Laplace.

4.4. Conclusions

Les développements que nous avons faits donnent une expression analytique de la transformée de Fourier de la loi de (D_t) et de la loi conjointe de (D_t) et $(\dot{D}_t)$. On peut ainsi calculer numériquement la loi à court terme de la fluctuation d'une observation d'une structure élastique soumise aux vents aléatoires, en considérant les termes non linéaires du champ de pression et les effets dynamiques.

De la connaissance du taux de passage à court terme par un niveau donné du processus (D_t), on peut par exemple déterminer la loi de valeur extrême à court terme des fluctuations d'une observation et en déduire ainsi la

valeur extrême la plus probable d'une observation sur une période de temps donné pour une vitesse moyenne donnée du vent de référence, valeur qui est particulièrement intéressante pour le dimensionnement de la structure.

Néanmoins, il reste le problème de la meilleure approximation numérique des transformées de Fourier des lois pour pouvoir réaliser effectivement les calculs numériques. Comme nous l'avons dit dans l'ntroduction, cette question sera traitée ultérieurement.

ANNEXE

Soit (V_s) un processus gaussien indexé sur $\mathbf{R}\times S$, où S est un compact de $\mathbf{R}^2$. Soient $s = (t, y, z)$ et $s' = (t+\tau, y+Y, z+Z) \in \mathbf{R}\times S$. La fonction d'autocorrélation du processus gaussien centré (V_s) stationnaire en temps modélisant la fluctuation de la vitesse longitudinale du vent s'écrit ([2], [9]) :

$$\begin{aligned} R_V(s', s) &= \mathscr{E}(V_{s'}, V_s) \\ &= \int_0^{+\infty} \cos 2\pi n\tau \times k_1 n(1+k_2 n^2)^{-4/3} \\ &\quad \times \exp\{-k_3 n\sqrt{Y^2+Z^2}\}\, dn \end{aligned}$$

avec $k_1, k_2, k_3 > 0$. La variance σ_V^2 de (V_s) est donnée par

$$\sigma_V^2 = \int_0^{+\infty} k_1 n(1+k_2 n^2)^{-4/3}\, dn.$$

D'après [12] et [13], une condition suffisante pour qu'il existe une version séparable de (V_s) ayant ses trajectoires presque sûrement continues sur $\mathbf{R}\times S$ est que

$$(13)\quad \mathscr{E}|V_{s'}-V_s|^2 < \frac{K}{|\mathrm{Log}\,\|s'-s\|\,|^{1+\delta}} \qquad \text{avec} \quad \delta > 0 \quad \text{et} \quad K < \infty.$$

LEMME. — *Introduisons sur* $\mathbf{R}\times S$ *la distance*

$$\|s'-s\| = (4\pi^2\tau^2 + k_3^2 Y^2 + k_3^2 Z^2)^{1/2}.$$

Alors

$$\forall \eta > 0, \quad \|s'-s\| < \eta \;\Rightarrow\; \mathscr{E}|V_{s'}-V_s|^2 < C\|s'-s\|^{2/3}$$

où C *est une constante positive finie.*

L'inégalité ([13]) est donc vérifiée puisque

$$C\|s'-s\|^{2/3} < \frac{K}{|\mathrm{Log}\|s'-s\||^{1+\delta}}$$

et par conséquent (V_s) a ses trajectoires presque sûrement continues sur $\mathbf{R}\times S$.

Démonstration du lemme. – Un calcul simple montre que dans le cas présent

$$\mathscr{E}(V_{s'}-V_s)^2 = 2[\sigma_V^2 - R_V(s', s)].$$

Posons

$$p = k_3\sqrt{Y^2+Z^2} - 2i\pi\tau \qquad \text{avec} \quad i=\sqrt{-1}$$

et notons $\mathscr{R}(z)$ et $\mathscr{I}(z)$ respectivement la partie réelle et imaginaire du nombre complexe z.

On a

$$R_V(s', s) = \mathscr{R}\left\{\int_0^{+\infty} e^{-pn} k_1 n(1+k_2 n^2)^{-4/3}\, dn\right\}.$$

Une intégration par partie donne

$$R_V(s', s) = \sigma_V^2 - \sigma_V^2 \mathscr{R}\{pI(p)\},$$

avec

$$I(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pn} F(n)\, dn \qquad \text{et} \qquad F(n) = (1+k_2 n^2)^{-1/3},$$

d'où

$$\mathscr{E}(V_{s'}-V_s)^2 = 2\sigma_V^2 \mathscr{R}\{pI(p)\}.$$

Nous allons chercher un équivalent de $I(p)$ quand $|p| \to 0$.

Remarquons que $\mathscr{R}(p) \geqq 0$, $\mathscr{I}(p) \geqq 0$ mais que $p \neq 0$.

Soit : $N > 1$. Pour $n > N$, $F(n) = An^{-2/3} + \varepsilon(n) n^{-5/3}$ avec $\varepsilon(n) \to 0$ et $F(n) \sim An^{-2/3}$ quand $n \to \infty$ et $A = k_2^{-1/2}$.

On écrit :

$$I(p) = \int_0^{+\infty} A e^{-pn} n^{-2/3}\, dn + \int_0^N e^{-pn}[F(n) - A n^{-2/3}]\, dn + \int_N^{+\infty} e^{-pn} \varepsilon(n) n^{-5/3}\, dn.$$

Le module de chacune des deux dernières intégrales est majoré par une constante indépendante de p.

Pour la première intégrale on distingue le cas où $\mathscr{R}\, p > 0$ et celui pour lequel $\mathscr{R}\, p = 0$. On en déduit que

$$\forall \rho > 0 \qquad \text{si} \quad |p| < \rho, \qquad \mathscr{E}(V_{s'} - V_s)^2 < C\,|p|^{2/3},$$

d'où le résultat énoncé dans le lemme.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CRAMER H. et LEADBETTER M. R., *Stationary and Related Stochastic Processes*, John Wiley and Sons, 1967.

[2] DAVENPORT A. G., *The Dependence of Wind Loads on Meteorological Parameters, International Research*, (Seminar on Wind Effects on Buildings and Structures, Ottawa, 1967).

[3] GROTHENDIECK A., *La Théorie de Fredholm* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, vol. 84, 1956, p. 319-384).

[4] KRÉE P. et MET P. N., *Utilisation de la transformation de Laplace pour l'évaluation de fonctions de répartition* (*Public. Inst. Stat. de l'Université de Paris* (*I.S.U.P.*), vol. 21, fasc. 1 et 2, 1976, p. 65-84).

[5] KRÉE P., *Equations linéaires à cœfficients aléatoires*, Instituto Nazionale di Alta Mathematica, Symposia Mathematica, vol. VII, 1971.

[6] KRÉE P., *Equations aux dérivées partielles en dimension infinie* (*Séminaire* 1re *année* 1974-1975, I.H.P., 1975).

[7] LEADBETTER M. R., *On Crossings of Levels and Curves by a wide Class of Stochastic Processes* (*Annals of Math. Stat.*, vol. 37, 1966, p. 260-267).

[8] SCHWARTZ L., *Sous-espaces hilbertiens d'espaces vectoriels topologiques et noyaux associés* (*noyaux reproduisants*) (*J. d'anal. math.*, Jérusalem, 1964, p. 115-256).

[9] SOIZE C., *Dynamique stochastique des structures élastiques soumises aux charges de vent* (*Thèse de* 3e *cycle*, Paris VI, juin, 1975).

[10] SOIZE C., *Sur la dynamique stochastique des structures élastiques* (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 280, série A, 30 juin 1975, p. 1765-1768).

[11] SOLER J. L., *La Loi de probabilité de Wishart associée à un élément aléatoire gaussien décentré à valeurs dans un espace de Fréchet séparable. Application aux fonctions aléatoires gaussiennes* (*C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 281, série A, 22 septembre 1975 pp. 471-474).

[12] BERNARD P., *Quelques propriétés des trajectoires des fonctions aléatoires stables sur* $\mathbf{R}^k$ (*Ann. Inst. Henri-Poincaré*, vol. V. I, n° 2, 1970, pp. 131-151).

[13] DUDLEY R. M., *Sample Functions of the Gaussian Process* (*The Annals of Probability*, vol. 1, n° 1, 1973, p. 66-103).