# Quelques inégalités caractérisant les gaussiennes généralisées

Jean-François Bercher

# Quelques inégalités caractérisant les gaussiennes généralisées

Jean-François BERCHER,

Laboratoire d'Informatique Gaspard Monge, UMR 8049
Université Paris-Est, ESIEE, Cité Descartes 93162 Noisy-le-Grand Cedex
Jean-Francois.Bercher@univ-paris-est.fr

**Résumé –** Dans cet article, on propose de caractériser les gaussiennes généralisées comme les densités atteignant les bornes de plusieurs extensions d'inégalités connues en théorie de l'information. On retrouve en cas particulier les résultats pour la gaussienne standard.

**Abstract –** In this paper, we propose to characterize a class of generalized Gaussian distributions as the densities that saturate several extensions of classical information theoretic inequalities. The results for the standard Gaussian are recovered as a particular case.

Le rôle et le caractère central de la distribution gaussienne en traitement du signal est bien-connu, de même que l'importance et l'étude des déviations à la gaussiannité. Dans le cadre de la caractérisation de signaux et de bruits non-gaussiens, caractérisés par exemple par des lois à queues lourdes, les densités gaussiennes généralisées [1, 2] ont reçu une attention particulière. De tels modèles apparaissent par exemple utiles comme statistiques des coefficients d'ondelettes [3], sont utilisés en codage vidéo ou dans des techniques de filtrage et reconstruction d'images [4, 5], ou comme modèles non gaussiens en communication [6]. La gaussienne généralisée apparaît également comme atteignant une borne de Cramér-Rao généralisée pour un moment d'ordre quelconque [7, 8] dans un problème d'estimation du paramètre de localisation. En physique statistique "nonextensive", on retrouve ce type de distributions comme solutions d'un problème de maximisation d'entropie de Rényi-Tsallis. Notons encore que ces distributions apparaissent comme solutions d'équations de diffusion [9], et dans des problèmes d'inégalités de Sobolev sur $\mathbb{R}^n$ [10].

Dans cet article, on propose plusieurs caractérisations informationnelles de ces gaussiennes généralisées. on montre d'abord que les gaussiennes généralisées maximisent une entropie de Rényi sous une contrainte de moment généralisé. Après avoir introduit une extension de l'information de Fisher, on donne une inégalité liant information de Fisher et entropie de Rényi, puis une inégalié de type Cramér-Rao, ces deux inégaliés étant saturées, à nouveau, par les gaussiennes généralisées.

Les gaussiennes généralisées auxquelles nous nous intéressons ici possèdent la densité suivante

$$G_\gamma(x) = \begin{cases} \frac{1}{Z(\gamma)} \left(1 - s\gamma|x|^\alpha\right)_+^{\frac{1}{s}} & \text{si } s \neq 0 \\ \frac{1}{Z(\gamma)} \exp\left(-\gamma|x|^\alpha\right) & \text{pour } s = 0 \end{cases} \tag{1}$$

avec

$$Z(\gamma) = \begin{cases} \frac{2}{\alpha}\left(-\gamma s\right)^{-\frac{1}{\alpha}} B\left(\frac{1}{\alpha}, -\frac{1}{s} - \frac{1}{\alpha}\right) & \text{pour } 0 > s > -\alpha \\ \frac{2}{\alpha}\left(\gamma s\right)^{-\frac{1}{\alpha}} B\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{s} + 1\right) & \text{pour } s > 0 \end{cases} \tag{2}$$

et

$$Z(\gamma) = \frac{2}{\alpha}\left(\gamma\right)^{-\frac{1}{\alpha}} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \text{ pour } s = 0,$$

où $B(x, y)$ désigne la fonction bêta, $\gamma$ est un paramètre positif et où on utilise la notation $(x)_+ = \max\{x, 0\}$.

Pour $s > 0$, la densité est à support compact tandis que pour $s < 0$ elle est définie sur tout $\mathbb{R}$, et se comporte comme une loi puissance. Notons que la gaussienne généralisée est habituellement restreinte au cas $s = 0$ donné ci-dessus. La Figure 1 présente ainsi la famille de gaussiennes généralisées obtenues avec $\alpha = 2$, pour plusieurs valeurs de $s$.

Dans le cadre de la physique non extensive, on fait également appel au concept de distributions compagnes (*escort-distributions*), appelées aussi "*zooming distributions*", qui sont définies de la manière suivante : si $f(x)$ est une densité de probabilité, alors sa compagne d'ordre $a$, $a \geq 0$, est donnée par

$$f_a(x) = \frac{f(x)^a}{\int f(x)^a \mathrm{d}x}, \tag{3}$$

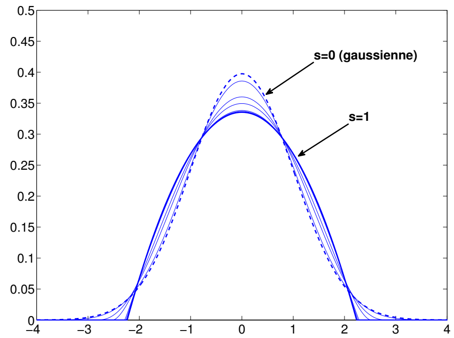
pourvu que $M_a[f] = \int f(x)^a \mathrm{d}x$ soit fini. Ces distributions compagnes ont été introduites dans le contexte des multifractales [11], avec d'intéressantes connections avec la thermodynamique standard, et le codage de source [12]. Comme en physique statistique nonextensive [13], on utilisera ici des moments généralisés calculés vis-à-vis de la distribution compagne : le moment absolu généralisé d'ordre $\alpha$ est défini par

$$m_{\alpha,a}[f] = E_a\left[|x|^\alpha\right] = \frac{\int |x|^\alpha f(x)^a \mathrm{d}x}{\int f(x)^{qa} \mathrm{d}x}. \tag{4}$$

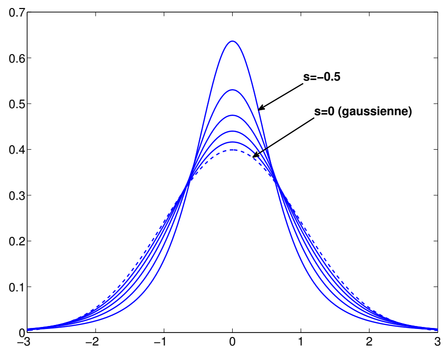
En utilisant conjointement les notions d'escort distribution et de divergence ou d'entropie de Rényi, on peut définir une divergence et une entropie à deux paramètres $a$ et $\lambda$ selon

$$D_{a,\lambda}(f||g) = D_{\frac{a}{\lambda}}(f_\lambda||g_\lambda) \tag{5}$$

$$= \frac{1}{a-\lambda} \log \frac{\left[\int f(x)^a g(x)^{\lambda-a} \mathrm{d}x\right]^\lambda}{\left[\int f(x)^\lambda \mathrm{d}x\right]^a \left[\int g(x)^\lambda \mathrm{d}x\right]^{\lambda-a}}, \tag{6}$$




(a)




(b)

FIGURE 1 – Exemples de gaussiennes généralisées, avec $\alpha = 2$. Pour $s > 0$, la densité est à support compact, cas (a) ; tandis que pour $s < 0$, la densité est définie sur tout $\mathbb{R}$. Pour $s = 0$, on retrouve la gaussienne standard.

où $D_{\frac{a}{\lambda}}$ désigne la divergence de Rényi d'index $a/\lambda$ et $f_\lambda$ la distribution compagne de $f$ d'ordre $\lambda$. De même on introduit une puissance entropique d'ordre $(a, \lambda)$

$$\begin{aligned} N_{a,\lambda}[f] &= \left[\int f^a \mathrm{d}x\right]^{\frac{\lambda}{\lambda-a}} \left[\int f^\lambda \mathrm{d}x\right]^{-\frac{a}{\lambda-a}}, \\ &= M_a[f]^{\frac{\lambda}{\lambda-a}} M_\lambda[f]^{-\frac{a}{\lambda-a}}, \end{aligned} \tag{7}$$

associée à l'entropie d'ordre $(a, \lambda)$ selon

$$H_{a,\lambda}[f] = \log N_{a,\lambda}[f]. \tag{8}$$

Il est bien connu que sous une contrainte de moment d'ordre 2, la gaussienne standard maximise l'entropie de Shannon. Pour un moment généralisé tel que (4), le maximum de l'entropie de Rényi de même ordre sous cette contrainte est une gaussienne généralisée de la forme (1) avec $s = 1 - a$. Plus généralement, on a le résultat ci-dessous, qui étend le résultat de [14] donné dans le cas $a = 1$ :

**Proposition 1.** *[Inégalité moment-entropie]*
*Si $N_{a,\lambda}[f]$ est la puissance entropique d'ordre $(a, \lambda)$ et $m_{\alpha,a}[f]$ est le $a$-moment d'ordre $\alpha$, avec $a, \lambda > 0$ tel que toutes les quantités soient finies, alors*

$$\frac{m_{\alpha,a}[f]^{\frac{1}{\alpha}}}{N_{a,\lambda}[f]} \geq \frac{m_{\alpha,a}[G]^{\frac{1}{\alpha}}}{N_{a,\lambda}[G]}, \tag{9}$$

*où le terme de droite est une constante, calculée à partir de $G_\gamma$ avec $\gamma = 1$, et où l'égalité est atteinte pour tout $f = G_\gamma$ donné par (1) avec $s = \lambda - a$.*

*Démonstration.* Considérons la gaussienne généralisée (1) de paramètre $\gamma\theta$, que l'on notera $G_{\gamma\theta}$, et dénotons $A(\gamma\theta) = 1/Z(\gamma\theta)$. On a alors directement

$$\int f^a G_{\gamma\theta}^{\lambda-a} \mathrm{d}x \leq A(\gamma\theta)^{\lambda-a}(1-(\lambda-a)\gamma\theta\, m_{\alpha,a}[f]) M_a[f], \tag{10}$$

où $m_{\alpha,a}[f]$ est le $a$-moment d'ordre $\alpha$ de la densité $f$, et où l'inégalité dans (10) résulte du fait que pour $\lambda > a$, le support de $(1 - (\lambda - a)\gamma\theta|x|^\alpha)_+$ peut être plus petit que celui de $f$. À partir de (10) on obtient immédiatement, avec $f = G_\theta$ et $\gamma = 1$, que

$$M_\lambda[G_\theta] = A(\theta)^{\lambda-a}\left(1 - (\lambda - a)\theta\, m_{\alpha,a}[G_\theta]\right) M_a[G_\theta]. \tag{11}$$

En utilisant maintenant l'identité $A(\gamma\theta) = \gamma^{\frac{1}{\alpha}} A(\theta)$, en choisissant $\gamma = \frac{m_{a,\alpha}[G_\theta]}{m_{a,\alpha}[f]}$, et en exploitant (11), la relation (10) devient

$$\int f^a G_{\gamma\theta}^{\lambda-a} \mathrm{d}x \leq \gamma^{\frac{\lambda-a}{\alpha}} \frac{M_\lambda[G_\theta]}{M_a[G_\theta]} M_a[f]. \tag{12}$$

Finalement, la non-négativité de la divergence (6) mène à

$$1 \leq \left(\frac{\left[\int f^a G_{\gamma\theta}^{\lambda-a} \mathrm{d}x\right]^\lambda}{M_\lambda[f]^a\, M_\lambda[G_{\gamma\theta}]^{\lambda-a}}\right)^{\frac{1}{a-\lambda}} = \left(\frac{m_{\alpha,a}[f]}{m_{\alpha,a}[G_\theta]}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \frac{N_{a,\lambda}[G_\theta]}{N_{a,\lambda}[f]}$$

avec égalité ssi $f = G_\theta$ pour tout $\theta$. Dans la mesure où le rapport $m_{\alpha,a}[G_\theta]^{\frac{1}{\alpha}}/N_{a,\lambda}[G_\theta]$ est indépendant de $\theta$, on aboutit à l'inégalité (9). □

L'importance de l'information de Fisher comme mesure de l'information sur un paramètre d'une distribution est bien connue. Elle permet, notamment, de qualifier la qualité d'un estimateur via la borne de Cramér-Rao sur la variance d'un estimateur. L'information de Fisher peut-être étendue au-delà de l'ordre 2, bien que cela semble peu connu, et fournit une borne de Cramér-Rao généralisée pour le moment absolu d'ordre quelconque sur l'erreur d'estimation, cf [15, 16, 17, p. 488]. Un énoncé simple est le suivant.

**Proposition 2.** *[Inégalité de Cramér-Rao généralisée]*
*Soit $f(x)$ une densité de probabilité définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}$. Si $f(x)$ est continûment différentiable par rapport à un paramètre déterministe $\theta$, satisfait les conditions de régularité qui permettent d'échanger l'intégration par rapport à $x$ et la dérivation par rapport à $\theta$, et si les différentes intégrales sont finies, alos pour tout estimateur $g(x)$ du paramètre $\theta$,*

$$E\left[|g(x) - \theta|^\alpha\right]^{\frac{1}{\alpha}} I_{\theta,\beta}[f]^{\frac{1}{\beta}} \geq \left|1 + \frac{d}{d\theta} E\left[g(x) - \theta\right]\right| \tag{13}$$

*avec $\alpha$ et $\beta$ conjugués de Hölder l'un de l'autre, $\alpha \geq 1$, et où*

$$I_{\theta,\beta}[f] = E\left[\left|\frac{\dot{f}(x)}{f(x)}\right|^\beta\right]^{\frac{1}{\beta}} = \int_\Omega \left|\frac{\frac{d}{d\theta} f(x)}{f(x)}\right|^\beta f(x) dx \tag{14}$$

*est l'information de Fisher généralisée d'ordre $\beta$ sur le paramètre $\theta$.*

Si le paramètre $\theta$ est un paramètre de localisation scalaire, et $f(x;\theta) = f(x-\theta)$, alors l'information de Fisher de la distribution est définie par $I_\beta[f] = \int \left|\frac{d \ln f(x)}{dx}\right|^\beta f(x)\mathrm{d}x$. Cette information est utilisée comme méthode d'inférence et d'explication en physique statistique, voir par exemple Frieden [18]. Elle est utilisée comme un outil pour caractériser des signaux ou des systèmes complexes, avec des applications en géophysique, biologie, reconstruction ou traitement du signal. Nous nécessiterons ici une version étendue de cette information de Fisher, introduisant un paramètre supplémentaire $b$ réel, et définie par

$$I_{b,\beta}[f] = \int \left|\frac{d \ln f(x)}{dx}\right|^\beta f(x)^b \mathrm{d}x. \tag{15}$$

Un premier résultat relie information de Fisher, entropie de Rényi et moments généralisés.

**Proposition 3.** *[Inégalité Fisher-Rényi-moment]*

*Soit $f$ une densité sur $\mathbb{R}$, supposée absolument continue et telle que* $\lim_{|x|\to\infty} x\, f(x)^\lambda = 0$. *Pour* $a = \alpha\mu\,(\lambda-1)+1$ *et* $b = \beta\,(1-\mu)\,(\lambda-1)+1$, *avec* $\mu \in [0,1]$ *et* $\alpha, \beta$ *conjugués de Hölder, on a*

$$I_{b,\beta}[f]^{\frac{1}{\beta}}\, m_{\alpha,a}[f]^{\frac{1}{\alpha}} \geq \frac{1}{\lambda} M_\lambda[f]\, M_a[f]^{\frac{1}{\alpha}} \tag{16}$$

*avec égalité uniquement si $f$ est une gaussienne généralisée $f = G_\gamma$ avec $s = \lambda - a$.*

*Démonstration.* Considérons la fonction génératrice informationnelle $M_\lambda[f]$. Par intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} M_\lambda[f] &= \int f(x)^\lambda \mathrm{d}x = \left[x\, f(x)^\lambda\right]_{-\infty}^{+\infty} - \lambda \int x\, \dot{f}(x)\, f(x)^{\lambda-1}\mathrm{d}x \\ &= -\lambda \int \left[x\, f(x)^{\mu(\lambda-1)}\right] \left[\frac{\dot{f}(x)}{f(x)} f(x)^{(1-\mu)(\lambda-1)}\right] f(x)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

où on a utilisé l'hypothèse $\lim_{|x|\to\infty} x\, f(x)^\lambda = 0$ et où on a introduit $\mu \in [0,1]$. On peut appliquer l'inégalité de Hölder à l'intégrale sur la seconde ligne, avec $\alpha$ et $\beta$ deux réels conjugués de Hölder l'un de l'autre. On obtient alors l'inégalité suivante, avec les notations précisées pour $a$ et $b$ :

$$\left(\int |x|^\alpha\ f(x)^a \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int \left|\frac{\dot{f}(x)}{f(x)}\right|^\beta f(x)^b\, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{\beta}} \geq \frac{1}{\lambda} M_\lambda[f].$$

En divisant enfin les deux membres par $M_a[f]^{\frac{1}{\alpha}}$, on arrive finalement à l'inégalité (16).

Les conditions d'égalité dans l'inégalité de Hölder s'écrivent ici : $|x|^\alpha\, f(x)^a = K \left|\frac{\dot{f}(x)}{f(x)}\right|^\beta f(x)^b$ d'une part, avec $K$ positif, et sign $\left(\dot{f}(x)\right)$ = -sign $(x)$ d'autre part. Finalement en utilisant le fait que $\alpha/\beta = \alpha - 1$, l'équation différentielle du premier ordre se réduit à

$$|x|^{\alpha-1}\, f(x)^{\frac{a-b}{\beta}+1} = -K\, \dot{f}(x)\, \mathrm{sign}(x). \tag{17}$$

Les relations entre $b$ et $a$ conduisent à $(b-a)/\beta = \lambda - a$. Dans ces conditions, il est aisé de voir que la solution de (17) n'est rien d'autre que (1). □

Pour $a = \lambda = 1$, on obtient une inégalité de Cramér-Rao généralisée pour le paramètre de localisation:

$$I_{1,\beta}[f]^{\frac{1}{\beta}}\, m_{\alpha,1}[f]^{\frac{1}{\alpha}} \geq 1, \tag{18}$$

avec égalité pour la gaussienne généralisée avec $s = 0$. Cette inégalité a été donnée par Boekee [8].

Comme conséquence directe de (16), on peut aussi obtenir une inégalité de Cramér-Rao généralisée dans le cas $a = 1$ (moments standards) et $\lambda > 1$. En effet, pour $\lambda > 1$, $M_\lambda[f]$ est une fonctionelle convexe, et présente par conséquent un seul minimiseur parmi toutes les densités de moment donné. D'après l'inégalité de moment-entropie, ce minimiseur est une gaussienne généralisée d'exposant $1/(\lambda-1)$ :

$$M_\lambda[f] \geq \inf_{p/m_{\alpha,1}[p]=m_{\alpha,1}[f]} M_\lambda[p] = M_\lambda[G_\theta].$$

Ainsi, dans le cas $\lambda > 1$, l'inégalité (16) conduit aussi

$$I_{b,\beta}[f]^{\frac{1}{\beta}}\, m_{\alpha,1}[f]^{\frac{1}{\alpha}} \geq \frac{1}{\lambda} M_\lambda[G_\theta], \tag{19}$$

avec $b = \beta\,(\lambda-1)+1$, et égalité ssi $f = G_\theta$. Le terme de droite peut aussi être écrit $I_{b,\beta}[G_\theta]^{\frac{1}{\beta}}\, m_{\alpha,1}[G_\theta]^{\frac{1}{\alpha}}$, ou encore $I_{b,\beta}[G_\theta]^{\frac{1}{\beta}}\, m_{\alpha,1}[G_\theta]^{\frac{\lambda}{\alpha}}\, m_{\alpha,1}[G_\theta]^{\frac{1-\lambda}{\alpha}}$. Dans ces conditions, l'inégalité (19) devient

$$I_{b,\beta}[f]^{\frac{1}{\beta}}\, m_{\alpha,1}[f]^{\frac{1}{\alpha}}\, m_{\alpha,1}[G_\theta]^{-\frac{1-\lambda}{\alpha}} \geq I_{b,\beta}[G_\theta]^{\frac{1}{\beta}}\, m_{\alpha,1}[G_\theta]^{\frac{\lambda}{\alpha}}.$$

Puisque pour la distribution optimum on a $G_\theta$ telle que $m_{\alpha,1}[f] = m_{\alpha,1}[G_\theta]$, on obtient

$$I_{b,\beta}[f]^{\frac{1}{\beta}}\, m_{\alpha,1}[f]^{\frac{\lambda}{\alpha}} \geq I_{b,\beta}[G_\theta]^{\frac{1}{\beta}}\, m_{\alpha,1}[G_\theta]^{\frac{\lambda}{\alpha}}. \tag{20}$$

Finalement, on peut vérifier que le membre de droite ne dépend pas de $\theta$, et que la borne est ainsi atteinte pour toute gaussienne généralisée. L'égalité (20), obtenue dans le cas $\lambda > 1$, est une inégalité de Cramér-Rao généralisée donnée dans[14].

Il est encore possible de compléter cette inégalité par une autre liant simplement l'information de Fisher $I_{b,\beta}[f]$ et les entropies de Rényi d'ordres $\lambda$ et $a$. La démonstration en est plus délicate, et on invite le lecteur intéressé à se reporter à [19]. Elle repose sur l'exploitation d'une inégalité de Gagliardo-Nirenberg sur $\mathbb{R}$ due à Nagy [20], à partir de laquelle on arrive au résultat suivant.

**Proposition 4.** *[Inégalité Fisher-Rényi]*

*Pour* $a = \alpha\mu\,(\lambda-1)+1$ *et* $b = \beta\,(1-\mu)\,(\lambda-1)+1$, *avec* $\mu \in [0,1]$ *et* $\alpha, \beta$ *conjugués de Hölder, on a*

$$\left(\frac{I_{b,\beta}[f]}{M_a[f]^{\frac{b}{a}}}\right)^{\frac{a}{\beta\lambda}} N_{a,\lambda}[f] \geq \left(\frac{I_{b,\beta}[G]}{M_a[G]^{\frac{b}{a}}}\right)^{\frac{a}{\beta\lambda}} N_{a,\lambda}[G] \tag{21}$$

*où l'égalité est obtenue si et seulement si $f$ est la gaussienne généralisée $f = G_\gamma$ avec $s = \lambda - a$.*

Pour $a = 1$, on obtient l'inégalité de Fisher (généralisée) de Lutwak et al. [14], et celle-ci se réduit à l'inégalité de Stam, saturée par la gaussienne habituelle, pour $\lambda = 1$, $\alpha = \beta = 2$.

Enfin, en combinant l'inégalité moment-entropie (9) et l'inégalité Fisher-Rényi-moment (16) dans le cas $(\lambda - a) \geq 0$ ; ou encore les inégalités moment-entropie (9) et Fisher-Rényi (21), on obtient une inégalité reliant information de Fisher généralisée, normalisée par $M_a[f]$, et moment le généralisé $m_{\alpha,a}[f]$, c'est-à-dire finalement une inégalité de Cramér-Rao, qui étend l'inégalité de Cramér-Rao (20) présentée ci-avant.

**Proposition 5.** *[Inégalité de Cramér-Rao]*
*Pour* $a = \alpha\mu(\lambda - 1) + 1$ *et* $b = \beta(1-\mu)(\lambda - 1) + 1$, *avec* $\mu \in [0, 1]$, $\alpha, \beta$ *conjugués de Hölder, on a*

$$\left(\frac{I_{b,\beta}[f]}{M_a[f]^{\frac{b}{a}}}\right)^{\frac{a}{\beta\lambda}} m_{\alpha,a}[f]^{\frac{1}{\alpha}} \geq \left(\frac{I_{b,\beta}[G]}{M_a[G]^{\frac{b}{a}}}\right)^{\frac{a}{\beta\lambda}} m_{\alpha,a}[G]^{\frac{1}{\alpha}}, \quad (22)$$

*où* $m_{\alpha,a}[f]$ est donné par *(4) et avec égalité uniquement si* $f$ *est la gaussienne généralisée* $f = G_\gamma$, *avec* $s = \lambda - a$.

On retrouve l'inégalité de Cramér-Rao généralisée de [14] dans le cas $\mu = 0$ ($a = 1$) de moments classiques, et l'inégalité de Cramér-Rao standard lorsque $\lambda = 1$ et $\alpha = \beta = 2$.

Dans cette communication, on s'est ainsi intéressé à la famille des gaussiennes généralisées (1), famille qui se révèle utile comme modèle dans nombre de situations en traitement du signal, et qui intervient également en physique statistique et en mathématiques. Plus précisément, on a montré que ces gaussiennes généralisées atteignent les bornes de plusieurs généralisations d'inégalités de la théorie de l'information. Ces constatations peuvent ouvrir la voie à de nouvelles interprétations ou argumentations de ces distributions pour des applications en traitement du signal.

# References


[1] M. K. Varanasi and B. Aazhang, "Parametric generalized gaussian density estimation," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 86, pp. 1404–1415, Oct. 1989.

[2] S. Nadarajah, "A generalized normal distribution," *Journal of Applied Statistics*, vol. 32, no. 7, pp. 685–694, 2005.

[3] K. Birney and T. Fischer, "On the modeling of DCT and subband image data for compression," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 4, no. 2, pp. 186–193, 1995.

[4] P. Moulin and J. Liu, "Analysis of multiresolution image denoising schemes using generalized Gaussian and complexity priors," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 45, no. 3, pp. 909–919, 1999.

[5] C. Bouman and K. Sauer, "A generalized Gaussian image model for edge-preserving MAP estimation," *IEEE Transactions on Image Procesing*, vol. 2, pp. 296—310, 1993.

[6] A. Fraysse, B. Pesquet-Popescu, and J. C. Pesquet, "On the uniform quantization of a class of sparse sources," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 55, no. 7, pp. 3243–3263, 2009.

[7] S. Batalama and D. Kazakos, "On the generalized Cramer-Rao bound for the estimation of the location," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 45, no. 2, pp. 487–492, 1997.

[8] D. Boekee, "An extension of the Fisher information measure," in *Topics in Information Theory* (I. Csiszár and P. Elias, eds.), vol. 16, (Keszthely, Hungary), pp. 113–123, János Bolyai Mathematical Society and North-Holland, 1977.

[9] E. Lutz, "Anomalous diffusion and Tsallis statistics in an optical lattice," *Physical Review A*, vol. 67, no. 5, p. 051402, 2003.

[10] M. D. Pino and J. Dolbeault, "Best constants for Gagliardo-Nirenberg inequalities and applications to nonlinear diffusions," *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, vol. 81, pp. 847–875, Sept. 2002.

[11] A. Chhabra and R. V. Jensen, "Direct determination of the $f(\alpha)$ singularity spectrum," *Physical Review Letters*, vol. 62, p. 1327, Mar. 1989.

[12] J.-F. Bercher, "Source coding with escort distributions and Rényi entropy bounds," *Physics Letters A*, vol. 373, pp. 3235–3238, Aug. 2009.

[13] C. Tsallis, A. R. Plastino, and R. F. Alvarez-Estrada, "Escort mean values and the characterization of power-law-decaying probability densities," *Journal of Mathematical Physics*, vol. 50, p. 043303, 2009.

[14] E. Lutwak, D. Yang, and G. Zhang, "Cramér-Rao and moment-entropy inequalities for Rényi entropy and generalized Fisher information," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 51, no. 2, pp. 473–478, 2005.

[15] E. W. Barankin, "Locally best unbiased estimates," *The Annals of Mathematical Statistics*, vol. 20, pp. 477–501, Dec. 1949.

[16] I. Vajda, "$\chi^\alpha$-divergence and generalized Fisher information," in *Transactions of the Sixth Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions and Random Processes*, p. 223–234, 1973.

[17] E. Weinstein and A. Weiss, "A general class of lower bounds in parameter estimation," *Information Theory, IEEE Transactions on*, vol. 34, no. 2, pp. 338–342, 1988.

[18] B. R. Frieden, *Science from Fisher Information: A Unification*. Cambridge University Press, 2004.

[19] J.-F. Bercher, "Some information theoretic inequalities for generalized moments." Article soumis – disponible auprès de l'auteur, 2011.

[20] B. Szôkefalvi-Nagy, "Über Integralungleichungen zwischen einer Funktion und ihrer Ableitung," *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)*, vol. 10, pp. 64–74, 1941.