Random uncertainties modeling in transient elastodynamics

Christian Soize

Rubrique : Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Série II b

Titre en français : Modélisation des incertitudes aléatoires en élastodynamique transitoire

Titre en anglais : Random uncertainties modeling in transient elastodynamics

Titre courant : Modélisation des incertitudes aléatoires en élastodynamique

Auteur : Christian Soize

Adresse postale : ONERA, BP 72, 92322 CHATILLON Cedex

E-mail : soize@onera.fr

Résumé. Une nouvelle approche probabiliste non paramétrique est présentée pour modéliser les incertitudes aléatoires en élastodynamique linéaire transitoire. L'information utilisée ne demande pas une description des paramètres locaux du système mécanique. Le modèle probabiliste est construit dans les coordonnées généralisées associées aux modes propres élastiques. L'information utilisable est constituée des propriétés algébriques des matrices généralisées de masse, de dissipation et de raideur qui doivent être définies positives, et de la connaissance de ces matrices pour le modèle matriciel réduit moyen. La convergence de la solution stochastique par rapport à la dimension du modèle matriciel réduit probabiliste est étudiée.

Abstract. A new nonparametric probabilistic approach is presented for modeling random uncertainties in transient linear elastodynamics. The information used does not require a description of the local parameters of the mechanical model. The probability model is constructed in the generalized coordinates associated with the elastic eigenmodes. The available information is constituted of the algebraic properties of the generalized mass, damping and stiffness matrices which have to be positive-definite symmetric matrices, and the knowledge of these matrices for the mean reduced matrix model. The convergence of the stochastic solution with respect to the dimension of the random reduced matrix model is analysed.

Mots clés : Incertitudes aléatoires, élastodynamique transitoire, principe optimisation entropie

Keywords: Random uncertainties, transient elastodynamics, entropy optimization principle

Abridged version (written in american english)

We consider the evolution boundary value problem, defined as the mean structural model, corresponding to the linear transient response of a three-dimensional bounded viscoelastic medium without memory.

Its variational formulation is stated as follows. Find the displacement field $t \mapsto \mathbf{u}(t)$ from $\mathcal{I} = [0\,, T]$ into the Hilbert space $\mathbb{V}$ of admissible displacement fields such that, for all $\mathbf{v}$ in $\mathbb{V}$, $\underline{m}(\ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + \underline{d}(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + \underline{k}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = g(\mathbf{v}\,; t)$ with zero initial conditions at time $t = 0$. The assumptions are such that there is a unique solution $t \mapsto \mathbf{u}(t)$ from $\mathcal{I}$ into $\mathbb{V}$. The mean reduced matrix model with finite dimension n is usually constructed using the Ritz-Galerkin projection of the variational formulation on the subspace $\mathbb{V}_n$ of $\mathbb{V}$ spanned by the elastic structural modes $\{\underline{\boldsymbol{\varphi}}_1, \ldots, \underline{\boldsymbol{\varphi}}_n\}$ of the mean structural model, associated with the n lowest eigenfrequencies $0 < \underline{\omega}_1 \leq \ldots \leq \underline{\omega}_n$ which are such that $\underline{m}(\underline{\boldsymbol{\varphi}}_\alpha, \underline{\boldsymbol{\varphi}}_\beta) = \underline{\mu}_\alpha \delta_{\alpha\beta}$ and $\underline{k}(\underline{\boldsymbol{\varphi}}_\alpha, \underline{\boldsymbol{\varphi}}_\beta) = \underline{\mu}_\alpha \underline{\omega}_\alpha^2 \delta_{\alpha\beta}$. The mean reduced matrix model is written as $\mathbf{u}_n(\mathbf{x}, t) = \sum_{\alpha=1}^n q_\alpha^n(t)\, \underline{\boldsymbol{\varphi}}_\alpha(\mathbf{x})$ in which the $\mathbb{R}^n$-valued vector $\mathbf{q}^n(t) = (q_1^n(t), \ldots, q_n^n(t))$ is the solution of the time reduced problem $[\,\underline{M}_n]\, \ddot{\mathbf{q}}^n(t) + [\,\underline{D}_n]\, \dot{\mathbf{q}}^n(t) + [\,\underline{K}_n]\, \mathbf{q}^n(t) = \mathbf{F}^n(t)$ for t in $\mathcal{I}$ with zero initial conditions. The mean generalized mass, damping and stiffness matrices $[\,\underline{M}_n]$, $[\,\underline{D}_n]$ and $[\,\underline{K}_n]$ are in the set $\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$ of all the positive-definite symmetric $(n \times n)$ real matrices.

Random uncertainties in elastodynamics are usually modeled using *parametric models*. This means that the uncertain parameters (geometrical and mechanical parameters) have to be identified and appropriate probabilistic models of these uncertain parameters have to be constructed. In this paper we present a new approach, that we will call a *nonparametric model* of random uncertainties. Reference [2] is devoted to the vibration problem in finite dimension; here, the transient reponse problem is presented and convergence properties are studied when dimension n approaches infinity. The nonparametric model proposed consists in introducing a random reduced matrix model whose mean values of the random generalized matrices with values in $\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$ are the generalized matrices of the mean reduced matrix model. For n fixed in $\mathbb{N}$, the random reduced matrix model is written as $\mathbf{U}_n(\mathbf{x}, t) = \sum_{\alpha=1}^n Q_\alpha^n(t)\, \underline{\boldsymbol{\varphi}}_\alpha(\mathbf{x})$ in which $\{\mathbf{Q}^n(t) = (Q_1^n(t), \ldots, Q_n^n(t))\,, t \in \mathcal{I}\}$ is an $\mathbb{R}^n$-valued stochastic process verifying Eq. (1) with zero initial conditions. Random matrices $[\mathbf{M}_n]$, $[\mathbf{D}_n]$ and $[\mathbf{K}_n]$ are second-order random variables with values in $\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$ such that Eqs. (2) and (3) are satisfied. The probability distribution of random matrices $\{[\mathbf{M}_n], [\mathbf{D}_n], [\mathbf{K}_n]\}$ with values in $\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R}) \times \mathbb{M}_n^+(\mathbb{R}) \times \mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$ are constructed [2] in using the *entropy optimization principle* [3] which allows only the available information to be used, that is to say Eqs. (2) and (3). It is proved [2] that random matrices $[\mathbf{M}_n]$, $[\mathbf{D}_n]$ and $[\mathbf{K}_n]$ are independent. If $[\mathbf{A}_n]$ denotes $[\mathbf{M}_n]$, $[\mathbf{D}_n]$ or $[\mathbf{K}_n]$, then $[\,\underline{A}_n] = E\{[\mathbf{A}_n]\}$ denotes $[\,\underline{M}_n]$, $[\,\underline{D}_n]$ or $[\,\underline{K}_n]$. Matrix $[\underline{A}_n] \in \mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$ can be written as $[\underline{A}_n] = [\underline{L}_{A_n}]^T\, [\underline{L}_{A_n}]$. It is proved [2] that random matrix $[\mathbf{A}_n]$ can be written as $[\mathbf{A}_n] = [\underline{L}_{A_n}]^T\, [\mathbf{G}_{A_n}]\, [\underline{L}_{A_n}]$ in which $[\mathbf{G}_{A_n}]$ is a random matrix with values in $\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$ whose probability density function with respect to the measure $\widetilde{d}G_n = 2^{n(n-1)/4}\,\Pi_{1\leq i\leq j\leq n}\, d[G_n]_{ij}$ on the set $\mathbb{M}_n^S(\mathbb{R})$ of all the symmetric $(n\times n)$ real matrices is given by Eq. (4). This probability distribution is not a Wishart distribution when $\ell_A(n)$ is not an integer. Random matrices are defined on probability space $(\mathcal{A},\mathcal{T},P)$. Since $[\mathbf{G}_{A_n}]$ is a random matrix with values in $\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$, this matrix is almost surely invertible. For ω fixed in $\mathcal{A}$, the norm of matrix $[\mathbf{G}_{A_n}(\omega)]^{-1}$ is defined by $\|[\mathbf{G}_{A_n}(\omega)]^{-1}\| = \sup_{\mathbf{q}\in\mathbb{R}^n,\|\mathbf{q}\|=1} \|[\mathbf{G}_{A_n}(\omega)]^{-1}\mathbf{q}\|$. Then, fundamental Eq. (5) is proved and allows the convergence result defined by Eq. (6) to be obtained as the dimension n approaches infinity.

1. Position du problème

On considère le problème aux limites d'évolution, dit *modèle moyen*, de la réponse dynamique transitoire linéarisée, pour $t\in\mathcal{I}=[0\,,T]$, d'un milieu viscoélastique à mémoire instantanée qui occupe un domaine ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^3$, de point générique $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)$, de frontière $\partial\Omega=\Gamma_0\cup\Gamma$ régulière, avec condition de Dirichlet $\mathbf{u}(t)=0$ sur Γ_0 où $\mathbf{u}(t):\Omega\mapsto\mathbb{R}^3$ est le champ de déplacement à l'instant t, avec conditions initiales nulles $\mathbf{u}(0)=\dot{\mathbf{u}}(0)=0$, où $\dot{\mathbf{u}}=\partial\mathbf{u}/\partial t$ et soumis à des champs de forces extérieures $\mathbf{g}_{\text{surf}}(t)$ et $\mathbf{g}_{\text{vol}}(t)$ supposés de carré intégrable sur Γ et Ω respectivement. La formulation variationnelle de ce problème aux limites s'écrit : trouver $t\mapsto\mathbf{u}(t)$ à valeurs dans l'espace des déplacements admissibles $\mathbb{V}=\{\mathbf{u}\in\mathbb{H}\,,\partial\mathbf{u}/\partial x_j\in\mathbb{H}\,,\mathbf{u}=0\,\text{sur}\;\Gamma_0\}$, tel que $\underline{m}(\ddot{\mathbf{u}},\mathbf{v})+\underline{d}(\dot{\mathbf{u}},\mathbf{v})+\underline{k}(\mathbf{u},\mathbf{v})=g(\mathbf{v}\,;t)$ pour tout $\mathbf{v}\in\mathbb{V}$ et t dans $\mathcal{I}$, avec les conditions initiales nulles, où $\mathbb{H}=\{\,\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3)\,,\,u_j\in L^2(\Omega)\,\}$ est l'espace de Hilbert muni du produit scalaire $(\mathbf{u}\,,\mathbf{v})_{\mathbb{H}}=\int_\Omega\mathbf{u}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{v}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$ et de la norme associée $\|\mathbf{u}\|_{\mathbb{H}}=(\mathbf{u}\,,\mathbf{u})_{\mathbb{H}}^{1/2}$, et où l'espace de Hilbert $\mathbb{V}$ est muni du produit scalaire $(\mathbf{u}\,,\mathbf{v})_{\mathbb{V}}=(\mathbf{u}\,,\mathbf{v})_{\mathbb{H}}+\sum_{j=1}^3(\partial\mathbf{u}/\partial x_j\,,\partial\mathbf{v}/\partial x_j)_{\mathbb{H}}$ et de la norme associée $\|\mathbf{u}\|_{\mathbb{V}}=(\mathbf{u}\,,\mathbf{u})_{\mathbb{V}}^{1/2}$. La forme bilinéaire $\underline{m}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ de masse est symétrique, définie positive, continue sur $\mathbb{H}\times\mathbb{H}$ et telle que $\underline{m}(\mathbf{u},\mathbf{u})\geq c_{\underline{m}}\|\mathbf{u}\|_{\mathbb{H}}^2$ avec $c_{\underline{m}}$ une constante positive. Les formes bilinéaires $\underline{d}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ et $\underline{k}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ de dissipation et de raideur sont symétriques, définies positives, continues sur $\mathbb{V}\times\mathbb{V}$ et telles que $\underline{d}(\mathbf{u},\mathbf{u})\geq c_{\underline{d}}\|\mathbf{u}\|_{\mathbb{V}}^2$ et $\underline{k}(\mathbf{u},\mathbf{u})\geq c_{\underline{k}}\|\mathbf{u}\|_{\mathbb{V}}^2$ avec $c_{\underline{d}}$ et $c_{\underline{k}}$ des constantes positives. La forme linéaire $g(\mathbf{v}\,;t)=\int_\Gamma\mathbf{g}_{\text{surf}}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{v}(\mathbf{x})\,ds(\mathbf{x})+\int_\Omega\mathbf{g}_{\text{vol}}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{v}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$ est continue sur $\mathbb{V}$ et il existe donc $\mathbf{f}(t)$ dans le dual continu $\mathbb{V}'$ de $\mathbb{V}$ tel que $g(\mathbf{v}\,;t)=<\mathbf{f}(t)\,,\mathbf{v}>_{\mathbb{V}',\mathbb{V}}$ pour tout $\mathbf{v}$ dans $\mathbb{V}$, où $<.\,,.>_{\mathbb{V}',\mathbb{V}}$ est le crochet de dualité entre $\mathbb{V}'$ et $\mathbb{V}$. Sous les hypothèses introduites, ce problème variationnel d'évolution admet une unique solution $t\mapsto\mathbf{u}(t)$ de $\mathcal{I}$ dans $\mathbb{V}$ (voir par exemple, Vol. 8, Chap. XVIII, § 5 de [1]). En élastodynamique linéarisée, le *modèle matriciel réduit moyen* est classiquement obtenu par projection de Ritz-Galerkin sur le sous-espace $\mathbb{V}_n$ de $\mathbb{V}$ engendré par les modes propres élastiques $\{\underline{\boldsymbol{\varphi}}_1,\ldots,\underline{\boldsymbol{\varphi}}_n\}$, associés aux n plus petites pulsations propres $0 < \underline{\omega}_1 \leq \ldots \leq \underline{\omega}_n$, qui vérifient $\underline{m}(\underline{\boldsymbol{\varphi}}_\alpha, \underline{\boldsymbol{\varphi}}_\beta) = \underline{\mu}_\alpha \delta_{\alpha\beta}$ et $\underline{k}(\underline{\boldsymbol{\varphi}}_\alpha, \underline{\boldsymbol{\varphi}}_\beta) = \underline{\mu}_\alpha \underline{\omega}_\alpha^2 \delta_{\alpha\beta}$. On écrit $\mathbf{u}_n(\mathbf{x}, t) = \sum_{\alpha=1}^n q_\alpha^n(t) \, \underline{\boldsymbol{\varphi}}_\alpha(\mathbf{x})$ avec $\mathbf{q}^n(t) = (q_1^n(t), \ldots, q_n^n(t))$ le vecteur des coordonnées généralisées, solution du problème d'évolution $[\underline{M}_n] \, \ddot{\mathbf{q}}^n(t) + [\underline{D}_n] \, \dot{\mathbf{q}}^n(t) + [\underline{K}_n] \, \mathbf{q}^n(t) = \mathbf{F}^n(t)$ pour t dans $\mathcal{I}$ avec les conditions initiales $\mathbf{q}^n(0) = \dot{\mathbf{q}}^n(0) = 0$. Le vecteur $\mathbf{F}^n(t) = (F_1(t), \ldots, F_n(t))$ représente les forces généralisées telles que $F_\alpha(t) = g(\underline{\boldsymbol{\varphi}}_\alpha \, ; t)$. Les matrices généralisés $[\underline{M}_n]$, $[\underline{D}_n]$ et $[\underline{K}_n]$ de masse, d'amortissement et de raideur, sont réelles $(n \times n)$ symétriques définies positives et telles que $[\underline{M}_n]_{\alpha\beta} = \underline{\mu}_\alpha \, \delta_{\alpha\beta}$, $[\underline{D}_n]_{\alpha\beta} = \underline{d}(\underline{\boldsymbol{\varphi}}_\beta, \underline{\boldsymbol{\varphi}}_\alpha)$ et $[\underline{K}_n]_{\alpha\beta} = \underline{\mu}_\alpha \, \underline{\omega}_\alpha^2 \, \delta_{\alpha\beta}$. Classiquement, la *modélisation paramétrique* des incertitudes de modélisation en élastodynamique consiste à identifier les paramètres (géométriques et mécaniques) locaux incertains du modèle moyen, puis à construire le modèle probabiliste de ces paramètres sur un espace *ad hoc*. Nous proposons ici une nouvelle approche que nous appelerons par opposition à l'approche usuelle, *modélisation non paramétrique* des incertitudes en élastodynamique. La référence [2] est consacrée aux vibrations en dimension finie; le présent travail est une extension aux réponses transitoires et en dimension infinie.

2. Principes de construction du modèle non paramétrique des incertitudes en élastodynamique

Dans toute la suite, les variables aléatoires sont définies sur le même espace probabilisé $(\mathcal{A}, \mathcal{T}, P)$, l'espérance mathématique est noté E et les ensembles $\mathbb{M}_n^S(\mathbb{R})$ et $\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$ dénotent les matrices réelles $(n \times n)$ qui sont respectivement symétriques et symétriques définies positives. On commence par construire, pour chaque n fixé, le *modèle matriciel réduit probabiliste*, déduit du modèle matriciel réduit moyen, que l'on écrit $\mathbf{U}_n(\mathbf{x}, t) = \sum_{\alpha=1}^n Q_\alpha^n(t) \, \underline{\boldsymbol{\varphi}}_\alpha(\mathbf{x})$ où $\{\mathbf{Q}^n(t) = (Q_1^n(t), \ldots, Q_n^n(t)) \, , t \in \mathcal{I}\}$ est un processus stochastique à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ tel que

$$[\mathbf{M}_n] \, \ddot{\mathbf{Q}}^n(t) + [\mathbf{D}_n] \, \dot{\mathbf{Q}}^n(t) + [\mathbf{K}_n] \, \mathbf{Q}^n(t) = \mathbf{F}^n(t) \quad , \quad t \in \mathcal{I} \quad , \tag{1}$$

avec les conditions initiales $\mathbf{Q}^n(0) = \dot{\mathbf{Q}}^n(0) = 0$. Les matrices aléatoires $[\mathbf{M}_n]$, $[\mathbf{D}_n]$ et $[\mathbf{K}_n]$ sont des v.a du second ordre, à valeurs dans $\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$, telles que

$$E\{[\mathbf{M}_n]\} = [\underline{M}_n] \quad , \quad E\{[\mathbf{D}_n]\} = [\underline{D}_n] \quad , \quad E\{[\mathbf{K}_n]\} = [\underline{K}_n] \quad , \tag{2}$$

$$E\{\|[\mathbf{M}_n]^{-1}\|_F^2\} < +\infty \quad , \quad E\{\|[\mathbf{D}_n]^{-1}\|_F^2\} < +\infty \quad , \quad E\{\|[\mathbf{K}_n]^{-1}\|_F^2\} < +\infty \quad , \tag{3}$$

où $\| \, . \, \|_F$ est la norme de Frobenius. Pour chaque valeur de n fixé, la loi de probabilité de la v.a $\{[\mathbf{M}_n], [\mathbf{D}_n], [\mathbf{K}_n]\}$ est construite [2] en appliquant le *principe du maximum d'entropie* [3] qui permet de n'utiliser que la seule information utilisable, à savoir les Eqs. (2)-(3) et le fait que la v.a est à valeurs dans $\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R}) \times \mathbb{M}_n^+(\mathbb{R}) \times \mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$. Enfin, on étudie la convergence de la suite de processus stochastiques $\{\mathbf{U}_n(\mathbf{x}, t), \mathbf{x} \in \Omega, t \in \mathcal{I}\}_n$ ainsi construits lorsque $n \to +\infty$.

3. Modèle matriciel réduit probabiliste

En utilisant [2] et les Eqs. (2)-(3), on montre que les matrices aléatoires $[\mathbf{M}_n]$, $[\mathbf{D}_n]$ et $[\mathbf{K}_n]$, à valeurs dans $\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$, sont indépendantes dans leur ensemble. Dans la suite, $[\mathbf{A}_n]$ désigne $[\mathbf{M}_n]$, $[\mathbf{D}_n]$ ou $[\mathbf{K}_n]$ et donc, $[\underline{A}_n] = E\{[\mathbf{A}_n]\}$ désigne $[\underline{M}_n]$, $[\underline{D}_n]$ ou $[\underline{K}_n]$. Comme $[\underline{A}_n] \in \mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$, elle peut s'écrire $[\underline{A}_n] = [\underline{L}_{A_n}]^T\, [\underline{L}_{A_n}]$. On montre [2] que $[\mathbf{A}_n] = [\underline{L}_{A_n}]^T\, [\mathbf{G}_{A_n}]\, [\underline{L}_{A_n}]$, où $[\mathbf{G}_{A_n}]$ est une matrice aléatoire à valeurs dans $\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$ ayant une densité de probabilité par rapport à la mesure $\widetilde{d}G_n = 2^{n(n-1)/4}\, \Pi_{1\leq i\leq j\leq n}\, d[G_n]_{ij}$ sur $\mathbb{M}_n^S(\mathbb{R})$, qui s'écrit

$$p_{[\mathbf{G}_{A_n}]}([G_n]) = \mathbb{1}_{\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})}([G_n]) \times C_{A_n} \times \big(\det[G_n]\big)^{\ell_A(n)-1} \times \exp\left(-\frac{(n-1+2\ell_A(n))}{2}\,\mathrm{tr}[G_n]\right) \quad . \qquad (4)$$

La constante $C_{A_n} > 0$ est telle que $\int_{\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})} p_{[\mathbf{G}_n]}([G_n])\ \widetilde{d}G_n = 1$ et est connue explicitement [2]. La fonction $n \mapsto \ell_A(n)$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}^+$ est un paramètre de la loi de probabilité qui est lié à l'Eq. (3) et est définie ci-après. La moyenne de la v.a $[\mathbf{G}_{A_n}]$ est $[\underline{G}_{A_n}] = E\{[\mathbf{G}_{A_n}]\} = [\,I_n]$ (la matrice unité), et la covariance des v.a $[\mathbf{G}_{A_n}]_{jk}$ et $[\mathbf{G}_{A_n}]_{j'k'}$ est égale à $(n-1+2\ell_A(n))^{-1}(\delta_{j'k}\delta_{jk'}+\delta_{jj'}\delta_{kk'})$. Soit $\delta_A > 0$ le paramètre permettant de contrôler la dispersion de la matrice aléatoire $[\mathbf{G}_{A_n}]$, défini par $\delta_A^2 = \|\,[\underline{G}_{A_n}]\,\|_F^{-2} E\{\|\,[\mathbf{G}_{A_n}]-[\underline{G}_{A_n}]\,\|_F^2\}$. Il s'écrit $\delta_A^2 = (n+1)/(n-1+2\ell_A(n))$. Soit $n_0 \geq 1$ un entier fixé. Le paramètre δ_A doit être choisi indépendant de n et tel que $0 < \delta_A^2 < (n_0+1)/(n_0+5)$. Alors, pour tout $n \geq n_0$, on a $\ell_A(n) = an+b+1 > 3$ avec $a = (1-\delta_A^2)/(2\delta_A^2) > 0$ et $b = 1/(2\delta_A^2)$. Quand $\ell_A(n)$ est un entier positif, la densité définie par l'Eq. (4) coïncide avec une loi Wishart, sinon, l'assertion est fausse.

4. Convergence lorsque la dimension tend vers l'infini

Pour $n \geq n_0$ fixé, le processus stochastique $\{\mathbf{U}_n(\mathbf{x}, t),\ \mathbf{x} \in \Omega,\ t \in \mathcal{I}\}$, défini sur $(\mathcal{A}, \mathcal{T}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ est construit comme indiqué aux § 2 et 3. Si $\mathbf{Q} = (Q_1, \ldots, Q_n)$ est une v.a du second ordre à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, alors $|||\mathbf{Q}||| = (E\{\|\mathbf{Q}\|^2\})^{1/2} < +\infty$ avec $\|\mathbf{Q}\|^2 = <\mathbf{Q}\,,\mathbf{Q}>$ où $<.\,,.>$ est le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathbb{X}_\mathbb{H}$ (resp. $\mathbb{X}_\mathbb{V}$) l'ensemble des v.a du second ordre à valeurs dans l'espace $\mathbb{H}$ (resp. $\mathbb{V}$). Si $\mathbf{U} \in \mathbb{X}_\mathbb{H}$ (resp. $\mathbf{U} \in \mathbb{X}_\mathbb{V}$), alors $|||\mathbf{U}|||_\mathbb{H} = (E\{\|\mathbf{U}\|_\mathbb{H}^2\})^{1/2} < +\infty$ (resp. $|||\mathbf{U}|||_\mathbb{V} = (E\{\|\mathbf{U}\|_\mathbb{V}^2\})^{1/2} < +\infty$). Comme la matrice aléatoire $[\mathbf{G}_{A_n}]$ est à valeurs dans $\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$, elle est inversible presque sûrement. Pour tout

ω fixé dans $\mathcal{A}$, la norme de la matrice aléatoire $[\mathbf{G}_{A_n}(\omega)]^{-1}$, induite par la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$, est définie par $\|[\mathbf{G}_{A_n}(\omega)]^{-1}\| = \sup_{\mathbf{q}\in\mathbb{R}^n, \|\mathbf{q}\|=1} \|[\mathbf{G}_{A_n}(\omega)]^{-1}\mathbf{q}\|$, et peut s'écrire $\|[\mathbf{G}_{A_n}(\omega)]^{-1}\| = 1/\widetilde{\Sigma}_1(\omega)$ où $\widetilde{\Sigma}_1(\omega) > 0$ est la plus petite valeur propre de la matrice $[\mathbf{G}_{A_n}(\omega)] \in \mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$. On démontre le résultat suivant :

$$\forall n \geq n_0 \geq 1 \quad , \quad E\{\|[\mathbf{G}_{A_n}]^{-1}\|^2\} \leq C_{\delta_A} < +\infty \quad , \tag{5}$$

où C_{δ_A} est une constante positive finie indépendante de n, mais qui dépend de δ_A. Les grandes lignes de la preuve sont les suivantes. Soient $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$ les valeurs propres aléatoires de $[\mathbf{G}_{A_n}]$. En partant de l'Eq. (4), il est prouvé dans [2] que la densité de probabilité $p_{\mathbf{\Sigma}}(\boldsymbol{\sigma})$ par rapport à $d\boldsymbol{\sigma} = d\sigma_1 \ldots d\sigma_n$ de la v.a $\mathbf{\Sigma} = (\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n)$ à valeurs dans $\mathcal{D}_n = (]0\,,+\infty[)^n \subset \mathbb{R}^n$ s'écrit $p_{\mathbf{\Sigma}}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbb{1}_{\mathcal{D}_n}(\boldsymbol{\sigma}) \times c_\Sigma \times (\sigma_1 \times \ldots \times \sigma_n)^{\ell_A(n)-1} \{\Pi_{\alpha<\beta}|\sigma_\beta - \sigma_\alpha|\}\, e^{-\frac{1}{2}(n-1+2\ell_A(n))(\sigma_1+\ldots+\sigma_n)}$ avec $c_\Sigma > 0$ tel que $\int_{\mathcal{D}_n} p_{\mathbf{\Sigma}}(\boldsymbol{\sigma})\, d\boldsymbol{\sigma} = 1$. En introduisant la statistique ordonnée $\widetilde{\mathbf{\Sigma}} = (\widetilde{\Sigma}_1, \ldots, \widetilde{\Sigma}_n)$ de $\mathbf{\Sigma} = (\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n)$, telle que $0 < \widetilde{\Sigma}_1 \leq \widetilde{\Sigma}_2 \leq \ldots \leq \widetilde{\Sigma}_n$, on montre que pour tout $\varepsilon > 0$ on a $E\{\|[\mathbf{G}_{A_n}]^{-1}\|^2\} \leq \varepsilon^{-2} + H_n(\varepsilon)$ avec $H_n(\varepsilon) = \{n \int_0^\varepsilon d\sigma_1 \int_0^{+\infty} d\sigma_2 \ldots \int_0^{+\infty} d\sigma_n\; \sigma_1^{-2}\, h(\boldsymbol{\sigma})\}\{\int_0^{+\infty} d\sigma_1 \int_0^{+\infty} d\sigma_2 \ldots \int_0^{+\infty} d\sigma_n\; h(\boldsymbol{\sigma})\}^{-1}$ où $h(\boldsymbol{\sigma}) = (\sigma_1 \times \ldots \times \sigma_n)^{a(n+1)} \{\Pi_{\alpha<\beta}|\sigma_\beta - \sigma_\alpha|\}\, e^{-b(n+1)(\sigma_1+\ldots+\sigma_n)}$, les constantes a et b étant définies au § 3. En utilisant un raisonnement analogue à celui de la preuve du lemme 4.4, page 196 de [4], on montre que pour $\varepsilon > 0$ pris suffisamment petit et indépendant de n, on a $\lim_{n\to+\infty} H_n(\varepsilon) = 0$, ce qui termine la preuve de l'Eq. (5). La Fig. 1 montre, pour $n \geq n_0 = 2$, les graphes de la fonction $n \mapsto E\{\|[\mathbf{G}_{A_n}]^{-1}\|^2\}$ pour $\delta_A = 0.1$, 0.3 et 0.5, construits par la méthode de simulation numérique de Monte Carlo avec 100 tirages. Ces résultats numériques illustrent l'Eq. (5) qui est prouvée mathématiquement. Maintenant, si $\int_0^T \|\mathbf{f}(\tau)\|^2_{\mathbb{V}'}\, d\tau < +\infty$, alors on démontre que

$$\forall\, n \geq n_0 \;,\; \forall\, t \in \mathcal{I} \;,\; |||\mathbf{U}_n(t)|||^2_{\mathbb{V}} \;\leq\; C_1 \;<\; +\infty \;,\; |||\dot{\mathbf{U}}_n(t)|||^2_{\mathbb{H}} \;\leq\; C_2 \;<\; +\infty \quad , \tag{6}$$

où $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ sont des constantes finies indépendantes de n et t qui s'écrivent $C_1 = (c_{\underline{k}}^{-2} C_{\delta_K} + c_{\underline{d}}^{-2} C_{\delta_D}) \int_0^T \|\mathbf{f}(\tau)\|^2_{\mathbb{V}'}\, d\tau$ et $C_2 = (c_{\underline{m}}^{-2} C_{\delta_M} + c_{\underline{d}}^{-2} C_{\delta_D}) \int_0^T \|\mathbf{f}(\tau)\|^2_{\mathbb{V}'}\, d\tau$, avec $c_{\underline{m}}$, $c_{\underline{d}}$ et $c_{\underline{k}}$ les constantes définies au § 1, et C_{δ_M}, C_{δ_D} et C_{δ_K} les constantes de l'Eq. (5). La preuve de l'Eq. (6) est différente de la preuve donnée au § 5 du Chap. XVIII du vol. 8 de [1] pour le cas déterministe et est basée sur l'Eq. (5). Si $\mathbf{U}_n(t)$ (resp. $\dot{\mathbf{U}}_n(t)$) dénote $\{\mathbf{U}_n(\mathbf{x}, t), \mathbf{x} \in \Omega\}$ (resp. $\{\dot{\mathbf{U}}_n(\mathbf{x}, t), \mathbf{x} \in \Omega\}$), et comme $\mathcal{I}$ est un intervalle borné, l'Eq. (6) signifie que, pour tout n_0 fixé, la suite de fonctions $\{t \mapsto \mathbf{U}_n(t)\}_{n\geq n_0}$ (resp. $\{t \mapsto \dot{\mathbf{U}}_n(t)\}_{n\geq n_0}$) appartient à un borné de $L^2(\mathcal{I}, \mathbb{X}_{\mathbb{V}})$ (resp. $L^2(\mathcal{I}, \mathbb{X}_{\mathbb{H}})$). Notons que le résultat tient si L^2

est remplacé par L^∞. On peut donc extraire de la suite $\{t \mapsto \mathbf{U}_n(t)\}_n$ (resp. $\{t \mapsto \dot{\mathbf{U}}_n(t)\}_n$), une sous-suite $\{t \mapsto \mathbf{U}_{n_k}(t)\}_k$ (resp. $\{t \mapsto \dot{\mathbf{U}}_{n_k}(t)\}_k$) qui converge faiblement dans $L^2([0,T],\mathbb{X}_\mathbb{V})$ (resp. $L^2([0,T],\mathbb{X}_\mathbb{H})$) lorsque $k \to +\infty$.

[1] Dautray R., Lions J.-L., Analyse mathématique et calcul numérique, Masson, Paris, 1988

[2] Soize C., A nonparametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics, Probabilistic Engineering Mechanics 15 (2000) 277-294.

[3] Jaynes E. T., Information theory and statistical mechanics, Physical Review 106 (1957) 620-630 et 108 (1957) 171-190.

[4] Johansson K., On fluctuations of eigenvalues of random Hermitian matrices, Duke Mathematical Journal, 91 (1998) 151-204.

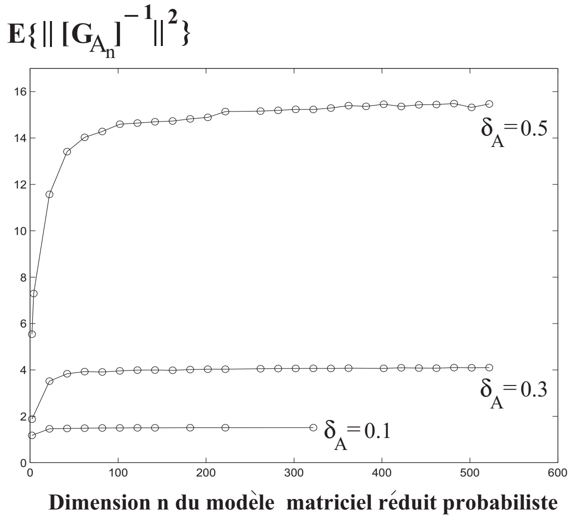

Fig. 1

FIG. 1. Graphe de la fonction $n \mapsto E\{\|[\mathbf{G}_{A_n}]^{-1}\|^2\}$ pour $\delta_A = 0.1, 0.3$ et 0.5.

FIG. 1. Graph of function $n \mapsto E\{\|[\mathbf{G}_{A_n}]^{-1}\|^2\}$ for $\delta_A = 0.1, 0.3$ and 0.5.